MATEMATIKANI O‘QITISHDA PARAMETRIK TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

Aliqulov Yusuf Pardayevich
Samarqand davlat universiteti akademik litseyi, matematika fani o‘qituvchisi

Raxmonov Asqar Ne’matovich
Samarqand davlat universiteti akademik litseyi, matematika fani o‘qituvchisi

Nazarov Madiyor Dilmurod o‘g‘li
Samarqand davlat universiteti akademik litseyi, matematika fani o‘qituvchisi

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada o‘quvchilar mustaqil ravishda parametrik misollarni yechishlari bo‘yicha to‘rt turdagi ya’ni chiziqli tenglama, chiziqli tenglamalar sistemasi, kvadrat tenglama hamda modul tenglamalarda parametrga bog‘liq holatlar o‘rganib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: Parametrik chiziqli tenglama, parametrik chiziqli tenglamalar sistemasi, parametrli kvadrat tenglamalar.

Akademik litseylar uchun matematika dasturiga “Parametrli tenglamalar” mavzusi kiritilgan. Ammo matematika kursining barcha mavzularini o‘rganayotganda siz parametrlar bilan bog‘liq misollarni ko‘rib chiqishingiz mumkin.

-Parametrli chiziqli tenglamalar.

Ta’rif: Agar $Ax = B$ (1) chiziqli tenglamada A va B koeffitsentlardan aqalli bittasi o‘rnida harfiy ifoda qatnashsa, (1) tenglamaga parametrga bog‘liq chiziqli tenglama deyiladi.

Bu tenglama yechimlari uchun uch xil holat bo‘ladi:

1. *A=0 va B≠0 bo‘lsa,* (1) tenglama yechimga ega bo‘lmaydi, ya’ni $0x = B$ tenglik hosil bo‘ladi, bu tenglik *B≠0* bo‘lganligi uchun *x* ning birorta ham qiymatida o‘rinli bo‘lmaydi.

2. *A≠0 bo‘lsa,* (1) tenglama yagona yechimga ega bo‘ladi, ya’ni $x = \frac{B}{A}$ tenglamani yechimi hosil bo‘ladi.

3. *A=0 va B=0 bo‘lsa,* (1) tenglama yechimi cheksiz ko‘p bo‘ladi, ya’ni $0x = 0$ tenglik hosil bo‘ladi, bu tenglik *x* ning istalgan qiymatida o‘rinli bo‘ladi.

1-misol. Tenglamani yeching

$k^2x+1=x+k$

Chiziqli tenglamani yechish qoidasiga ko‘ra,

$k^2x-x=k-1,$

$(k^2-1)x=k-1,$

$(k-1)(k+1)x=k-1$

$k\neq\pm1$ da yagona yechimga ega bo‘lgan,

k=1 da cheksiz ko‘p yechimga yega bo‘lgan $0x=0$ tenglamaga,

k=-1 yesa $0x=-2$, yechimlari bo‘lmagan tenglamaga ega bo‘lamiz.

Chiziqli tenglamalar tizimini o‘rganishni yechishda masalani nazariy asoslash, shuningdek, geometrik tasvirni berish kerak.

-Parametrli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Ta’rif: Ushbu $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (2) sistemada a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 va c_2 koeffitsentlardan aqalli bittasi o‘rnida harfiy ifoda qatnashsa, (2) sistemaga parametrli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

1. Agar $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ shart bajarilsa, (2) sistema yagona yechimga ega bo‘ladi (to‘g‘ri chiziqlar kesishadi).

2. Agar $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ shart bajarilsa, (2) sistema yechimga ega bo‘lmaydi (to‘g‘ri chiziqlar kesishmaydi (parallel) bo‘ladi).

3. Agar $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ shart bajarilsa, (2) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi (to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi).

2-misol. Tenglamalar sistemasi yechimiga yega bo‘lmagan, yagona yechimga ega bo‘ladigan va cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladigan a ning barcha qiymatlarini toping.

$$\begin{cases} 2x+a^2y=a^2+a-2 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

Agar har bir chiziqli tenglamani to‘g‘ri chiziq tenglamasi deb hisoblasak, o‘quvchilar bu sistemaning yechimi yo‘q, agar chiziqlar parallel bo‘lsa, x va y da koyeffisiyentlarning nisbati mutanosib bo‘lishi kerak, deb bemalol javob beradilar: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

Ushbu misolda u mavjud: . $\frac{2}{1}=\frac{a^2}{2}\neq\frac{a^2+a-2}{2}$

Tizimni hal qiladi $\begin{cases} a^2 = 4 \\ a^2 + a - 2 \neq a^2 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = \pm 2 \\ a \neq 2 \end{cases}$

Shunday qilib, $a = -2$, uchun sistemaning yechimlari bo‘lmaydi.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{2}{1} = \frac{a^2}{2} = \frac{a^2 + a - 2}{2}$ bundan $\begin{cases} a^2 = 4 \\ a^2 + a - 2 = a^2 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = \pm 2 \\ a = 2 \end{cases}$

$a = 2$ uchun, tenglamalar sistemasi cheksiz sonli yechimga ega bo‘ladi.

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\frac{2}{1} \neq \frac{a^2}{2}$ bundan $a^2 \neq 4$ => $a \neq \pm 2$ da sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

-. Parametrga bog‘liq kvadrat tenglamalar.

Ta’rif: Agar $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (3) kvadrat tenglamada a, b va c koeffitsentlardan aqalli bittasini o‘rnida harfiy ifoda qatnashsa, (3) tenglamaga parametrga bog‘liq kvadrat tenglama deyiladi.

Kvadrat tenglamalarni yechishda savollar tenglamaning ildizlari soni, ildizlar orasidagi munosabat bilan bog‘liq bo‘lishi mumkin.

1. Agar $D > 0$ bo‘lsa, (3) tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega bo‘ladi.
2. Agar $D = 0$ bo‘lsa, (3) tenglama yagona yechimga ega ($a = 0$ holini ham tekshirib ko‘rish kerak) bo‘ladi.
3. Agar $D = 0$ bo‘lsa, (3) tenglama ildizlari o‘zaro teng bo‘ladi.
4. Agar $\begin{cases} D = 0 \\ a > 0 \end{cases}$ bo‘lsa, $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadni to‘la kvadrat shaklda tasvirlash mumkin bo‘ladi.
5. Agar $D < 0$ bo‘lsa, (3) tenglama haqiqiy ildizga ega bo‘lmaydi.
6. Agar $a \cdot c < 0$ bo‘lsa, (3) tenglama ildizlari turli ishorali bo‘ladi.
7. Agar $\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot c < 0 \end{cases}$ bo‘lsa, (3) tenglama ildizlari bir xil ishorali bo‘ladi.
8. Agar $\begin{cases} b = 0 \\ a \cdot c < 0 \end{cases}$ bo‘lsa, (3) tenglama ildizlari qarama-qarshi sonlar bo‘ladi.
9. Agar $\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot b > 0 \\ a \cdot c > 0 \end{cases}$ bo‘lsa, (3) tenglama ikkala ildizi ham manfiy bo‘ladi.

10. Agar $\begin{cases} D>0 \\ a\cdot b<0 \\ a\cdot c>0 \end{cases}$ bo‘lsa, (3) tenglama ikkala ildizi ham musbat bo‘ladi.

11. Ushbu $ax^2+bx+c=0$ tenglama ildizlariga teskari sonlardan tuzilgan kvadrat tenglama $cx^2+bx+a=0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

12. Ushbu $ax^2+bx+c=0$ tenglama ildizlariga qarama-qarshi sonlardan tuzilgan kvadrat tenglama $ax^2-bx+c=0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

3-misol. m ning qanday qiymatlari uchun tenglama

$(m-3)x^2-6x+m+5=0$

ikkita haqiqiy ildizga ega bo‘ladi.

Va bu yerda siz geometrik yeskizdan boshlashingiz mumkin. Kvadrat funksiyaning grafigi parabola bo‘lgani uchun parabola x o‘qini OX ni ikki nuqtada kesib o‘tadi. Endi, albatta, o‘quvchilar kvadrat tenglama ikkita ildizga ega bo‘lgan shartni eslab qolishadi:

D> 0 biz olamiz.

$D=(-6)^2-4(m-3)(m+5)>0$,

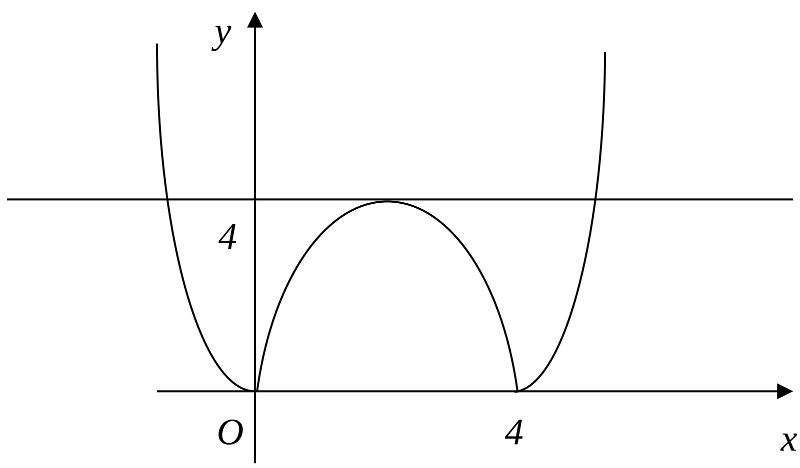
$36-4(m^2+2m-15)>0$,

$9-m^2-2m+15>0$

$$m^2+2m-24<0\ ,$$

Uchxad ildizlar: $m_1=-6$, $m_2=4$, $(m+6)(m-4)<0$ dan $-6<m<4$ ekanligi kelib chiqadi.

4-misol. a ning qanday qiymatida $|x^2-4x|=a$ tenglama uchta ildizga yega.



Yechishda $y=|f(x)|$ funksiya grafigini chizish kifoya. Grafikga qarasak, $0<a<4$ da tenglama 4 ta ildizga yega bo‘ladi, $a>4$ tenglama 2 ta ildizga yega yekanligini ko‘ramiz. $y=a$ to‘g‘ri chiziq berilgan chiziqqa tegsa, tenglama uchta ildizga yega bo‘ladi, ya’ni. $a=4$ da .

5-misol. k ning qanday qiymatlarida $x^2-(k+1)x+k^2+k-22=0$ tenglama ildizlaridan biri 2 dan kata, ikkinchisi esa 2 dan kichik bo‘ladi.

Yechish: Tenglikning chap qismi kvadrat funksiya bo‘lib, parabolaning tarmoqlari yuqoriga yo‘nalgan va shartga ko‘ra *OX* o‘qini 2 ta nuqtada ya’ni $x=2$ nuqtaning o‘ng va chap tomonidan kesib o‘tishi kerak. Demak, shu funksiya $x=2$ da manfiy qiymatga ega bo‘lishi kerak:

$2^2-(k+1)\cdot 2+k^2+k-22<0$ => $k^2-k-20<0$ => $-4<x<5$.

Demak, $k\in(-4;5)$ ekan.

6-misol. a ning qanday qiymatlarida $x^2-4|x|-a+3=0$ tenglama 2 ta musbat ildizga ega bo‘ladi.

Yechish: Bu tenglamada $|x|=t$ belgilash kiritamiz.Bu tenglama ikkita musbat ildizga ega bo‘lishi uchun t ning 2 ta musbat qiymati mavjud bo‘lishi kerak. Shuning uchun $t^2-4t-a+3=0$ tenglama 2 ta musbat ildizga ega bo‘ladigan a ning qiymatlarini topamiz:

$$\begin{cases} D>0 \\ a\cdot b<0 \\ a\cdot c>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4)^2-4\cdot 1\cdot(-a+3)>0 \\ 1\cdot(-4)<0 \\ 1\cdot(-a+3)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>-1 \\ a<3 \end{cases} \Rightarrow a\in(-1;3).$$

Demak, $a\in(-1;3)$ ekan.

7-misol. $(a^2+b^2+4)x^2+2(a+b+2)x+3=0$ tenglama haqiqiy yechimlarga ega bo‘lsa, 3a-b ni qiymatini toping.

*Yechish:*Berilgan tenglamada qavslarni ochamiz:

$a^2x^2+b^2x^2+4x^2+2ax+2bx+4x+3=0$

Buni quyidagicha ko‘rinishda yozib olamiz:

$a^2x^2+2ax+1+b^2x^2+2bx+1+4x^2+4x+1=0$

Bundan: $(ax+1)^2+(bx+1)^2+(2x+1)^2=0$ ni hosil qilamiz.

Bundan esa $\begin{cases} ax+1=0 \\ bx+1=0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b=2 \\ x=-0,5 \end{cases}$ yechimlarni hosil qilamiz.

Demak, 3a-b=2a=4 ekan.

Xulosa qilib aytganda, parametrli tenglamalarni yechishda o‘quvchilar ko‘p hollarda qiyinchiliklarga duch kelishadi.Yuqorida biz parametrga bog‘liq tenglamalarni yechishda o‘quvchilar tushinishiga qulay bo‘lgan usullarini ko‘rsatib berdik.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. I.F.Sharigin: Fakultativniy kurs po matematike, Moskva 1989
2. Leybson K.L: Sbornik praktichiskix zadaniy po matematike, Moskva 2009
3. A.X.Shaxmestr: Uravneniya, Moskva 2011
4. E.D. Kulanin, i.d: 3000 konkursnix zadach po matematike, Moskva 2003