GLOBAL SPLAYN FUNKSIYANING YAQINLASHISHI

Mohigul Komiljon qizi Ibragimova
Termiz davlat universiteti
mohigul9618@gmail.com
Suxrob Abdusamad o‘g‘li Xuramov
Termiz davlat universiteti

ANNOTATSIYA

Agar har bir $[x_i, x_{i+1}]$ qismiy kesmadagi splaynning noma’lum parametrlari boshqa qismiy kesmalardagi splaynlarning noma’lum parametrlari bilan birgalikda aniqlansa, bunday splaynlar global splaynlar deyiladi. Global splaynlarda qismiy kesmalardagi splaynlarning noma’lum parametrlari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini haydash usuli bilan yechish vositasida topiladi.

Kalit so‘zlar: splayn funksiyalar, global splaynlar, lokal interpolyatsiyalash, lokal splaynlar, interpolyatsiyon ko‘phadlar, klassik interpolyatsiyalash.

APPROACH OF GLOBAL SPLINE FUNCTION

ABSTRACT

If the unknown parameters of the spline in each $[x_i, x_{i+1}]$ partial section are determined in conjunction with the unknown parameters of the splines in other partial sections, such splines are called global splines. In global splines, the unknown parameters of splines in partial sections are found by solving a system of linear algebraic equations by the driving method.

Keywords: spline functions, global splines, local interpolation, local splines, interpolation polynomials, classic interpolation.

KIRISH

Klassik interpolyatsiya masalasida ko‘phadlar $[a, b]$ oraliqni o‘zida quriladi. Tugun nuqtalarni qancha ko‘paytirsak yaqinlashish shuncha yaxshi bo‘ladi. Lekin qurilayotgan ko‘phadning darajasi tugun nuqtalar soniga bog‘liq, tugun nuqtalar soni oshishi bilan ko‘phadning darajasi oshib boradi va ko‘phad koeffitsentlarini aniqlash uchun yuqori tartibli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga to‘g‘ri keladi. Klassik interpolyatsion ko‘phadlarni imkoniyatlari qisman chegaralangan. Tuzilgan algebraik tenglamalar sistemasining soni tugun nuqtalarga bog‘liq ekan, tugun nuqtalar oshishi bilan algebraik tenglamalar sistemasining tartibi ham oshib ketadi. Natijada klassik polinomlar qurilishida quyidagi kamchiliklar yuzaga keladi: interpolyatsion ko'phad yuqori darajali bo'lgani uchun formula qulay emas; yuqori darajali algebraik tenglamalar sistemasini yechish jarayonida ma'lum metodik xatoliklar paydo bo'ladi; hisoblash jarayoni murakkablashib, natijada hisoblash xatoligi qoladi.

Qurilayotgan ko'phad tiklanayotgan funksiyaga yaxshi yaqinlashmasligi mumkin. Shuning uchun, bu nuqsonlardan qutilish maqsadida interpolyatsiyalash masalasida klassik polinomlar o'rniga splayn funksiyalar yordamida yaqinlashtirish juda katta imkoniyatlarga ega bo'lib, tezda fanda o'z o'rnini topdi. Lokal interpolyatsion splaynlar interpolyatsiyalanayotgan ob'ektga yaxshi yaqinlashadi va qurilishi sodda ko'rinishda bo'ladi. Qurilayotgan splayn darajasi tugun nuqtalarga bog'liq emas. Qurilayotgan splayn funksiya $[a, b]$ oraliqda emas, balki $[x_{i,}\ x_{i+1}]$ $(i=\overline{0,\ n-1})$oraliqlarda quriladi va bu splayn-funksiya har bir oraliqlarda bir xil strukturali ko'phadlardan iborat bo'ladi.

Klassik interpolyatsiyalashda esa butun bir $[a,\ b]$ oraliqda bitta funksiya qurilar edi. Shuning uchun ham klassik interpolyatsiyalashga nisbatan, splayn funksiyalar yordamida qaralgan interpolyatsiyalash masalasining aniqlik darajasi yuqori va qurilishi jihatidan ham sodda bo'ladi. $[x_{i,}\ x_{i+1}]$ $(i=\overline{0,\ n-1})$ oraliqlarda qurilgan silliq-bo'lakli ko'phadli funksiyalarga *splayn funksiyalar* deyiladi.

Agar har bir $[x_{i,} x_{i+1}]$ qismiy kesmadagi splaynning noma'lum parametrlari

boshqa qismiy kesmalardagi splaynlarning noma'lum parametrlariga bog'liq bo'lmagan holda alohida topilsa, bunday splaynlar *lokal splaynlar* deyiladi.

Agar har bir $[x_{i,}\ x_{i+1}]$ qismiy kesmadagi splaynning noma'lum parametrlari boshqa qismiy kesmalardagi splaynlarning noma'lum parametrlari bilan birgalikda aniqlansa, bunday splaynlar *global splaynlar* deyiladi.

Global splaynlarda qismiy kesmalardagi splaynlarning noma'lum parametrlari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini haydash usuli bilan yechish vositasida topiladi.

Splayn yagona ravishda aniqlanishi uchun [a, b] oraliqning chetki a va b nuqtalarida chegaraviy shartlar deb ataluvchi qo'shimcha shartlar qo'yiladi. Amalda uchinchi darajali, ya'ni kubik splaynlar keng qo'llaniladi.

Splayn interpolyatsiyalash va splayn yaqinlashtirish

$[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmaga to'r kiritamiz.

$$a = x_0 < x_1 <\ldots x_{n-1} < x_n = b$$

va bu nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qatorlari ma'lum bo'lsin. Ya'ni

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x)$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Bu holda qismiy kubik interpolyatsiyalash masalasi quyidagicha qo'yiladi. $[a, b]$ kesmada $\exists$ $g(x)$ funksiyani toppish lozimki, u quyidagi talablarni qanoatlantirsin.

1) $g(x) \in C^{(2)}(a, b)$, ya'ni $g(x)$ funksiya o'zining 2 – tartibli hosilalari bilan uzluksiz.

2) har bir $[x_k - x]$ kesmada $g(x)$ kubik ko'phaddan iborat.

$$g(x) \equiv g_k(x) = \sum_{\ell=0}^{3} a_i^{(k)} (x_k - x)^{\ell}, \quad k = 1, \dots, n \tag{1}$$

3) $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ to'rning tugunlarida quyidagi tengliklar bajariladi

$$g(x_k) = f_k \qquad (k = 0, 1, \dots, n); \tag{2}$$

4) $g''(x)$ ushbu chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi

$$g''(a) = g''(b) = 0 \tag{3}$$

1)– 4) shartlarni qanoatlantiruvchi qismiy kubik $g(x)$ funksiya splayn deb ataladi. Yuqorida qo'yilgan masala yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun 1)- 4) shartlardan fiydalanamiz.

$g(x)$ funksiyaning 2 – tartibli hosilasi $[x_k - x]$ $(i = 1, \dots, n)$ kesmada uzluksiz va chiziqli bo'lganligi uchun, uni $x_{i-1} \le x \le x_i$ kesmada quyidagicha yozish mumkin:

$$g''(x) = m_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + m_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{4}$$

bu yerda $h_i = x_i - x_{i-1}$, $m_k = g''(x_i)$ tenglama (4) ning har ikkala tarafini ikki martadan integrallaymiz:

$$g'(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + A_i + B_i$$

$$g(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i \frac{x_i - x}{h_i} + B_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{5}$$

Bu yerda A_i va B_i ayrim integralllash o'zgarmas. Quyidagi shartlardan aniqlanadi.

$$g(x_{i-1}) = f_{i-1}, \qquad g(x_i) = f_i$$

Tenglama (5) ga $x = x_i$ va $x = x_{i-1}$ larni qo'yib, quyidagi tenglamalarga ega bo'lamiz.

$x = x_i$ da, $m_i \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i$

$x = x_{i-1}$ da, $m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1}$

Bundan integrallash o'zgarmaslarni A_i va B_i ning qiymatlarini aniqlaymiz.

$B_i = f_i - m_i \frac{h_i^2}{6}$

$A_i = f_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6}$

hamda ularni tenglama (5) ga qo‘yib, $g(x)$ funksiyaning oxirgi ko‘rinishini hosil qilamiz.

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{6h_i} + \left(f_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} +$$

$$+(f_i - m_i\frac{h_i^2}{6})\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \qquad (6)$$

va bundan

$$g'(x) = - m_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i} + m_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i-m_{i-1}}{6}h_i \qquad (7)$$

(7) tenglamadan $g'(x)$ hosilaning $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nuqtalarida bir tomonli limitlarini aniqlaymiz.

$$g'(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i}{3}m_i + \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i},$$

$$g'(x_i - 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}m_i - \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} + \frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}$$

Shart 1) ga asosan $g''(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz $g'(x)$ hosilaning $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nuqtalarida uzluksiz ekanligidan $(n-1)$ ta tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i+h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i} \qquad (8)$$

$i = 1, \ldots, n$-1

Bu tenglamalarni $m_0 = m_n = 0$ t1engliklar bilan munosabat (8) ga asosan to‘ldiramiz. Natijada $(n+1)$ ta noma’lum

$$0 = m_0, m_1, \ldots, m_n = 0$$

ni topish uchun $(n+1)$ tatenglamalarga ega bo‘lamiz. Bu yerdan $m_1, \ldots, m_n$ noma’lumlarni topish uchun

$$Am = Hf \qquad (8')$$

Algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Bu yerda A kvadrat matritsa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h^2}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_n+h_{n-1}}{3} \end{bmatrix}$$

m va f vektorlar, H esa to‘g’ri to‘rtburchak matritsa

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & \left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{1}{h_{n-1}} - \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

A matritsa simmetrik bo‘lib u qat’iy dioganal ustunlikka ega, Sistema (8) yoki (8ˊ) progonka metodi bilan yechiladi.

$$g'(x_i - 0) = m_{i-1}\frac{(x_i - (x_i - 0))^2}{2h_i} + m_i\frac{\left((x_i - 0) - x_{i-1}\right)^2}{2h_i} +$$
$$+\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6}h_i = 0 + m_i\frac{h_i}{2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_{i-1}}{2}h_i =$$
$$= \frac{h_i}{6}m_{i-1} + \left(\frac{h_i}{2} - \frac{h_i}{6}\right)m_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = \frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i}{3}m_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$g'(x_i - 0) = m_i\frac{(x_i - (x_i + 0))^2}{2h_{i+1}} + m_{i+1}\frac{\left((x_i + 0) - x_i\right)^2}{2h_{i+1}} +$$
$$+\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1} - m_i}{6}h_{i+1} = -m_i\frac{h_{i+1}}{2} + m_{i+1}\frac{0^2}{h_{i+1}} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} +$$
$$\frac{h_{i+}}{6}m_i =$$
$$= -\frac{h_{i+1}}{2}m_i + \frac{h_{i+1}}{2}m_i - \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = -\frac{h_{i+1}}{3}m_i - \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}$$

sistema (8ˊ) dan topilgan m_i larni (6) ga qo‘yib izlanayotgan splaynga ega bo‘lamiz.

Global splaynlar lokal splaynlarga alternativa sifatida xizmat qiladi. Global usulda approksimatsiya qilish lokal usulda approksimatsiya qilishga nisbatan splayn defektining minimalligini ta’minlaydi. Shu sababli global splaynlar hisoblash amaliyotida keng qo‘llaniladi.

Splaynlarning hisoblash matematikasida keng qo‘llanilayotganligi sabablaridan yana biri ularning qiymatlarini EHM larda hisoblashning qulayligi va ular yordamida interpolyatsiyalash kabi jarayonlarning keng sinfdagi to‘rlar uchun yaxshi yaqinlashishligidir.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Mirzayev A.E. o‘zining “Splayn funksiyalar asosida signallarni raqamli ishlash algoritmlarni samaradorligini oshirish” [3] mavzusidagi ilmiymishida splayn funksiyalarni qo‘llagan. Sayidova G.D. “Lokal interpolyatsion kubik splayn funksiya qurish va uni uzluksiz funksiyalar sinfida baholash” [5] mavzusidagi magistrlik dissertatsiya ishida lokal va global funksiyalarning ahamiyatini va global funksiyaning afzalliklarini ko‘rsatib o‘tgan.

Berilgan ishni bajarishda sonli usullar nazariyasining matematik apparati, splayn funksiyalardan hamda xatoligini baholashda C[a,b] va W[a,b] sinflardan foydalanildi.

NATIJALAR

Global kubik splaynlar yordamida funksiyalarni yaqinlashtirish

Hosil qilingan bir global interpolyatsion kubik splayn funksiyani garafigi Ryabenkiy global kubik splayn funkiyani grafigi hamda Grebennikov global kubik splayn funksiyani grafigi bilan taqqoslandi. Ushbu uchta global kubik splaynlarning yaqinlashishi berilgan funksiya $f(x)$ bilan solishtiramiz.

Bir global interpolyatsion kubik splayn funksiya $y[x_i, x_{i+1}]$ kesmada ko‘rinishga ega:

$$S_3(f,x) = \sum_{j=0}^{3} \varphi_{j+1}(t) f(x_{i+j-1}), \qquad (2.3.20')$$

bu yerda

$$\varphi_1(t) = -0{,}5(1-t)^2, \qquad \varphi_2(t) = 0{,}5(1-t)(2+2t-3t^2),$$
$$\varphi_3(t) = 0{,}5(1+4t-3t^2), \qquad \varphi_4(t) = -0{,}5(1-t)t^2.$$

Bunda $t = \frac{x-x_i}{h}$, $h = \frac{b-a}{N}, N = 1, 2, \ldots$

Bundan keyin qulaylik uchun bu splayn funksiyani $S_3(x)$ bilan belgilaymiz.

Ikkinchidan – bu Ryabenkiy global kubik splayn funksiyasi va u $[x_i, x_{i+1}]$ kesmada quyidagi ko‘rinishga ega:

$$S_3(f,x) = \sum_{j=0}^{3} \psi_j(t) f(x_{i+j-1}),$$

bu yerda

$$\psi_1(t) = (1-t)^2(1+t), \ \psi_2(t) = t(1+2t-2t^2), \ \psi_3(t) = t^2(1-t),$$

Bunda $t = \frac{x-x_i}{h}$, $h = \frac{b-a}{N}, N = 1, 2, \ldots$

Ryabenkey global splayn funksiyasini $PS_3(x)$ orqali belgilaymiz.

Uchinchi splayn – bu $[x_i, x_{i+1}]$ kesmada keying ko‘rinishga ega bo‘lgan Grebennikov global kubik splayn funksiyasi:

$$S_3(f,x) = \sum_{j=0}^{3} \phi_{j+1}(t) f(x_{i+j-1})$$

bu yerda

$$\phi_1(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \qquad \phi_2(t) = \frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3),$$

$$\phi_3(t) = \frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3), \qquad \phi_4(t) = \frac{1}{6}t^3.$$

Bunda $t = \frac{x-x_i}{h}$, $h = \frac{b-a}{N}, N = 1, 2, ...$

Grebennikov global kubik splayn funksiyasini $GS_3(x)$ deb belgilaymiz.

MUHOKAMA

Maqolada koʻp oʻlchovli splayn - approksimatsiya masalalarini yechish uchun splaynlar nazariyasining bir nechta jabhalari ham nazariy ham amaliy jihatdan oʻrganib chiqildi. Maqolada olingan natijalar yangi, nazariy va ayniqsa amaliy ahamiyatga ega. Mazkur dissertatsiya ishida qaralgan splayn funksiyalardan turli sinflardagi funksiyalarni yaqinlashtirishda foydalanish mumkin. Biror bir muammoli ob’ektni muammosini yechish uchun olingan berilgan ma’lumotlar asosida ob’ektning matematik modelini qurish, tahlil qilish va bashorat qilishda ushbu ishda qaralgan splayn funksiyadan foydalanish yaxshi natijalar beradi.

XULOSA

Hisoblash matematikasi fanining “Funksiyalarni interpolyatsiyalash” va “Funksiyalarni yaqinlashtirish” boʻlimlari fan – texnika rivojida muhim ahamiyatga ega. Hozirgi kunda jadval koʻrinishida berilgan funksiyalarni analitik koʻrinishini tiklash borasida klassik interpolyatsion koʻphadlarga nisbatan oʻzining nazariy va amaliy jihatdan afzallligi, ayniqsa funksiyalarni yaqinlashtirishda oʻzining qurilishi jihatidan soddaligi, EHM mashinalarini vaqtini tejashni, ayniqsa berilgan (f,x) funksiyaga yaqinlashish tezligi yuqoroligi bilan ajralib turgan interpolyatsion splayn funksiyalarning qurilishi va uning xatoligini baholash masalalarini taqribiy jihatdan fan-texnikaning rivojlanishida dolzarb masalalardan hisoblanadi.

ADABIYOTLAR ROʻYXATI

1. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism, Toshkent, Oʻzbekiston, 2003. 231-330.

2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Москва: Мир, 1972.-316.

3. Mirzayev A.E. oʻzining “Splayn funksiyalar asosida signallarni raqamli

ishlash algoritmlarni samaradorligini oshirish" Toshkent-2019

4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн функций. Москва: Наука, 1980. – 352 с.

5. Sayidova G.D. "Lokal interpolyatsion kubik splayn funksiya qurish va uni uzluksiz funksiyalar sinfida baholash" Toshkent-2018

6. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas and interpolation splines minimizing the semi-norm in K_2 (P_3) space// G.V.Milovanovic and M.Th. Rassias (eds.), Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, Spinger. – pp.573-611.