GEOMETRIYA FANIDAN TAKRORLASH DARSLARINI TASHKIL ETISH HAQIDA

Tursunov Bayramali Akbarovich
Ph.D., Qarshi Davlat universiteti
bakbarovich@mail.ru

Shodiyev Sadulla Yusupovich
Qarshi Davlat universiteti, katta o‘qituvchi
syushodiyev@mail.ru

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada o‘rta ta’lim maktabning matematikaga ixtisoslashtirilgan 9-11-sinflarida geometriya fanidan takrorlash darslarini yoki to‘garaklarni tashkil etishning bir usuli haqida so‘z boradi. Bunda yechimi qiyin bo‘lgan bitta masalani bir nechta sodda masalalarga bo‘lib yechish o‘rgatiladi, bu asosida o‘quvchilardagi o‘tilgan mavzu yuzasidan bo‘shliqlari va kamchiliklari aniqlanadi, keyingi mashg‘ulotda ularni mustahkamlaydi.

Kalit so‘zlar: Aylanaga ichki chizilgan burchak, uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylana, aylana vatari, sinuslar va kosinuslar teoremasi, uchburchak yuzi, keltirish formulalari

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается об одном способе организации уроков повторения или кружков по геометрии в 9-11 классах средней школы, специализирующихся на математике. При этом один трудная задача научат решать с помощью нескольких простых задачах, на основе которых выявляются пробелы и недостатки учащихся по прошедшей теме, укрепляют их в следующем занятии.

Ключевые слова: Вписанный угол, вписанный и описанный треугольник, хорда, теорема синусов и косинусов, площадь треугольника, формулы приведения.

ABSTRACT

This article discusses one way to organize repetition lessons or geometry circles in grades 9-11 of high school specializing in mathematics. At the same time, one difficult task will be taught to solve with the help of several simple tasks, on the basis of which gaps and shortcomings of students on the past topic are identified, strengthen them in the next lesson.

Key words: inscribed angle, circumscribed and inscribed circles of triangle, chord, law of sines and cosines, area of a triangle, reduction formulae

KIRISH

Ma'lumki, o‘rta ta'lim maktabda yoki oliy ta'lim yurtlarida geometriya fani matematikaning o‘zlashtirilishi qiyin bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Geometriyani o‘rganish uchun esa so‘z yuritiladigan obyekt haqida tasavvur bilan birga abstrakt fikrlash ham kerak bo‘ladi.

Maqolada berilgan fikrlar matematikaga ixtisoslashtirilgan 9-11-sinflarda hamda oliy ta'lim yurtlarining matematika yo‘nalishida o‘qiyotgan talabalar uchun geometriya fanidan takrorlash darslarini yoki to‘garaklarni tashkil etishning bir usuli haqidadir. Bunda o‘qituvchi yechimi qiyin bo‘lgan, o‘quvchilar yecha olmaydigan masalani o‘quvchilarga havola etadi, hamda masala yechimini topishda qanday fikrlar borligini bilish uchun biroz vaqt ajratadi. O‘quvchilarning o‘zaro fikr almashishlarini kuzatadi. Ularda qaysi mavzular bo‘yicha bilim sayozligi va xatoliklar borligini aniqlaydi hamda yon daftarchasiga yozib qo‘yadi. Navbatdagi mashg‘ulotda qanday masala yordamida o‘quvchilardagi bu kamchilikni to‘ldirish haqida bosh qotiradi va keyingi masalani tanlash osonroq bo‘ladi.

Kuzatuv yakunida berilgan masalani bir nechta sodda masalalarga bo‘lib, masalalarni ketma-ketlikda havola etadi. Yechim uchun kerakli ko‘rsatma va tavsiyalarni berib boradi, boshlang‘ich masala yechimini yakunlaydi.

Hosil qilingan sodda masalalar yechimlari o‘quvchilar uchun qiyinlik qilmasligi, masala yechimini darhol, yoki biroz bosh qotirib topishlari mumkin bo‘lgan masalalar sirasiga kirishi kerak. Agar biror masala yechimi qiyinlik qilsa uni yana sodda masalalarga bo‘linadi va o‘quvchilarga havola etiladi. Bunda soddalikdan murakkablikka tomon qadam-baqadam harakat qilinadi.

Bu fikrlarni barchamizga ma'lum bo‘lgan, yechimi o‘quvchilarga ancha qiyinlik qiladigan, quyidagi masala yordamida yoritamiz.

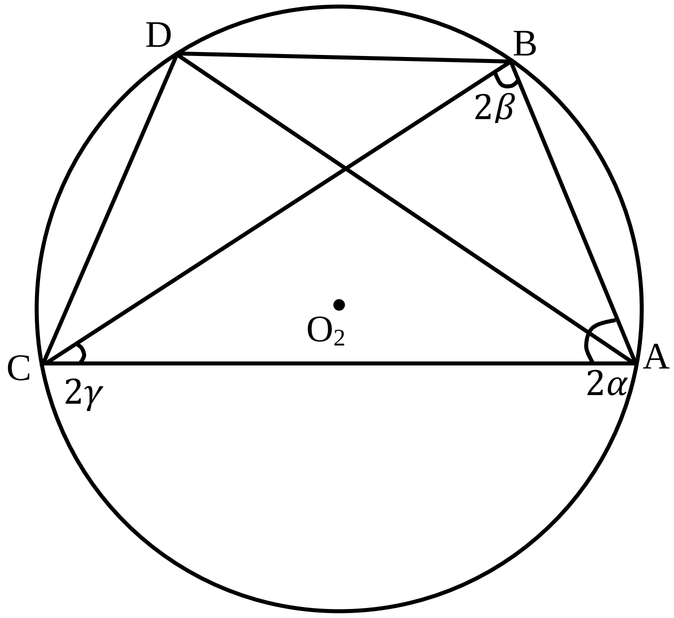
MUHOKAMA VA NATIJALAR

Masala. Uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylana radiuslari r va R, ular markazlari orasidagi masofa d ga teng bo‘lsa, u holda $d^2 = R^2 - 2Rr$ ni isbotlang.

Yuqorida aytilganidek o‘qituvchi o‘quvchilarning o‘zaro fikr almashishlarini kuzatadi, o‘zining xulosasini oladi hamda quyidagilarni birin-ketin bajaradi.

O‘qituvchi uchburchak burchaklarini mos holda 2α, 2β, 2γ kabi belgilab, doskaga quyidagi chizmani chizib, 1-sodda masalani beradi.

Quyida o‘qituvchi va o‘quvchilarning o‘zaro muloqoti, dars jarayoni bayon qilingan.



1-masala. Uchburchak $\angle A$ burchagi bissektrisasini o‘tkazamiz. Bissektrisa tashqi chizilgan aylanani D nuqtada kesib o‘tsin. CD va BD vatarlarning tengligini isbotlang.

Bu masala o‘quvchilar uchun qiyinlik qilmadi, u sodda edi. O‘quvchilar bir pasda isbotlashdi.

O‘quvchilar: Bitta vatarga tiralgan aylanadagi burchaklar haqidagi teoremaga asoslanib, CD va BD vatarlar teng α burchakka tiralganligini hisobga olib, bu vatarlar tengligini ko‘rsatamiz. Teng vatarlar teng burchaklarni tortib turadi.

O‘qituvchi: Masala yechimi to‘g‘ri, endi ikkinchi masalaga o‘tamiz.

2-masala. 1-masalaning davomi, $\angle CBD$ va $\angle DCB$ burchaklarni toping.

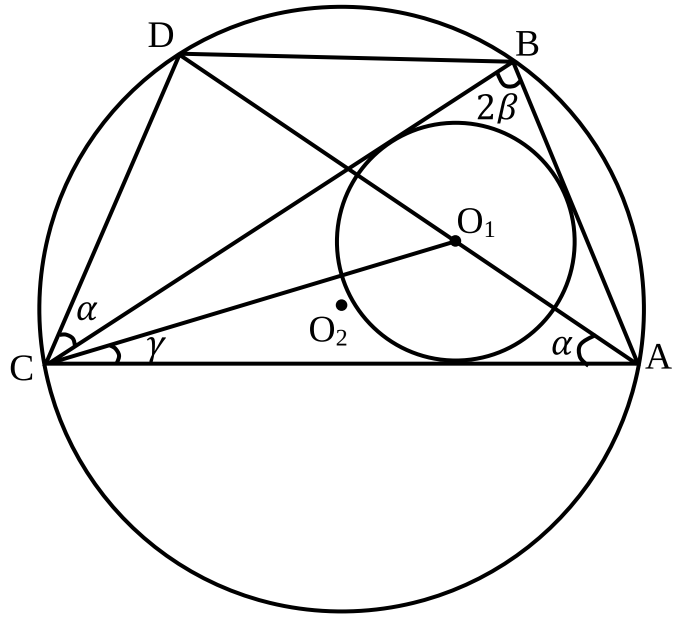
Bu masala ham o‘quvchilarga qiyinchilik tug‘dirmadi, Ular tezdagini masala yechimini topishdi.

$CD = BD$ ekanligidan ΔBDC uchburchak teng yonli, demak bu burchaklar teng: $\angle CBD = \angle DCB$. Ikkinchi tomondan vatarga tiralgan aylanaga ichki chizilgan burchaklar haqidagi teoremaga asosan $\angle DBC$ va $\angle DAC$ burchaklar bitta CD vatarga tiralgan, demak $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$. Xuddi shunday $\angle BCD$ va $\angle BAD$ burchaklar bitta BD vatarga tiralgan, demak $\angle BCD = \angle BAD = \alpha$. U holda

$$\angle CBD = \angle DCB = \alpha.$$

“Juda yaxshi” – dedi o‘qituvchi. O‘quvchilar bu masala yechimini ham qiynalmasdan topishdi. Endi keyingi masalaga o‘tamiz.

3-masala. Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazini qanday topamiz.



Bu masala ham o‘quvchilarga qiyinchilik tug‘dirmadi. Ular avvalgi o‘rganilgan bilimlarni eslashdi va darhol javob berishdi: Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi – uchburchak ichki burchaklari bissektrisalari kesishish nuqtasida bo‘ladi.

O‘qituvchi yuqoridagi chizmaga qo‘shimcha qilib chizmani to‘ldirdi va keyingi masalaga o‘tdi.

4-masala. Endi o‘ylab ko‘ringchi $\angle DCO_1$ burchak nimaga teng?

Bu savolga o‘quvchilar bir varakayiga javob berishdi: “Bu burchak $\alpha+\gamma$ ga teng: $\angle DCO_1 = \alpha+\gamma$”.

“Keyingi savolga ham shunday javob beringchi”, - dedi o‘qituvchi, o‘z o‘quvchilari faolligidan mamnun bo‘lgan holda, va keyingi masalani aytdi:

5-masala. $\angle DO_1C$ burchakni toping.

O‘quvchilar biroz o‘ylanib qolishdi. O‘qituvchi – “Aftidan bu savol biroz qiyinlik qildi shekilli” – deb o‘ylab, o‘quvchilarga yordamchi ma’lumotni aytmoqchi bo‘lgandi, bir o‘quvchi shunday javob berib qoldi: “Uchburchakning tashqi burchagi unga qo‘shni bo‘lmagan qolgan ikki ichki burchaklari yig‘indisiga teng, shunday emasmi?”. Ikkinchi o‘quvchi bunga ajablandi va “Bu Bizga qanday yordam beradi?” dedi. E’tibor beraylik, $\angle DO_1C$ - ΔACO_1 uchburchak $\angle O_1$ burchagining tashqi burchagi, demak u $\angle DO_1C = \alpha+\gamma$ ga teng.

“Ajabo”, dedi ikkinchi o‘quvchi, “demak, ΔCDO_1 – teng yonli ekanda, DC va DO_1 teng bo‘lar ekan”.

“Xuddi shunday, bu oltinchi masala edi, Siz buni aytmasimdan oldin topdingiz” – dedi o‘qituvchi va undan keyingi yettinchi masalani aytdi.

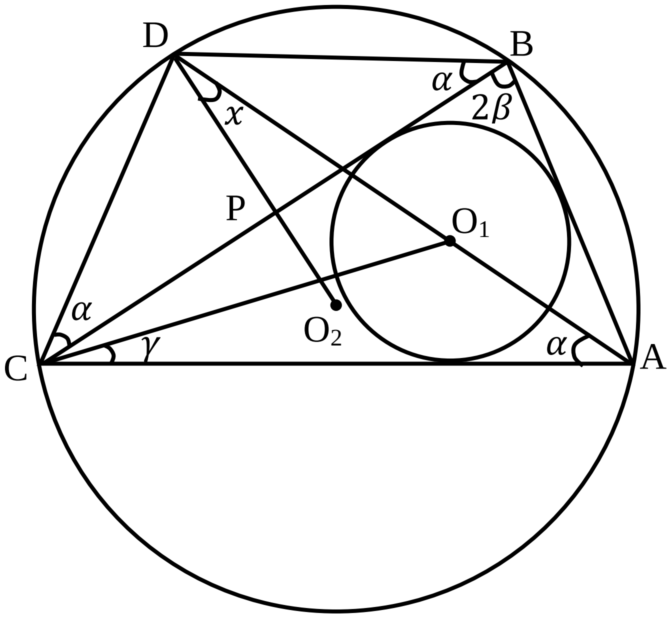
7-masala. Agar ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi R ma’lum bo‘lsa, DO_1 kesma uzunligi nimaga teng bo‘ladi?

O‘quvchilar masalani tezroq yechishlarini istab, o‘qituvchi “sinuslar teoremasini eslang” deb yordam berdi. Ular quyidagicha fikr yuritishdi:

ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana, ADC uchburchakka ham tashqi chizilgan aylana bo‘ladi. ΔDAC ning $\angle A$ burchagi α ga teng. Sinuslar teoremasini qo‘llab, $\frac{DC}{\sin\alpha} = 2R$ ni va $DC = DO_1$ ekanligidan $DO_1 = 2R\sin\alpha$ ni topamiz.

“Barakalla, o‘tilgan mavzularni yaxshi o‘zlashtiribsiz” – deb rag‘batlantirdi o‘qituvchi va masalani davom ettirdi.

Doskada chizilgan chizmaga qo‘shimcha qilib O_2D kesmani o‘tkazdi va – “Bu kesmaning uzunligi nimaga teng?” – deb so‘radi.



O‘quvchilar “O_2D – ADC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi-ku, u R ga teng” – deb javob berishdi. U holda:

8-masala. “$\angle O_2DO_1$ burchak nimaga tengligini topib ko‘ringchi?” – dedi o‘qituvchi.

O‘quvchilar masalani yecha olishmadi, yechimga borish ancha qiyin edi. Bu biroz murakkabroq masala edi. Buning uchun ozgina fikr yuritish kerak. O‘quvchilarga osonroq bo‘lishi uchun, o‘qituvchi quyidagi yordamchi savollar yordamida masala yechimini osonlashtirdi.

Savol – javob boshlandi:

O‘qituvchi: ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana BDC uchburchakka ham tashqi chizilgan bo‘ladi-mi?

O‘quvchilar: ha, tashqi chizilgan bo‘ladi.

O‘qituvchi: uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazini qanday topamiz?

O‘quvchilar: uchburchak tomonlari o‘rtalaridan shu tomonga perpendikulyarlar o‘tkazamiz, ularning kesishish nuqtasi tashqi chizilgan aylana markazi bo‘ladi.

O‘qituvchi: DO_2 kesma BC ga perpendikulyar bo‘ladimi?

O‘quvchilar: BDC uchburchak teng yonli bo‘lgani uchun BC tomonning o‘rta perpendikulyari D nuqtadan o‘tadi, chunki D nuqtadan tushurilgan balandlik, mediana ham bo‘ladi, demak DO_2 kesma BC ga perpendikulyar ekan.

O‘qituvchi: Agar DO_2 kesma BC ga perpendikulyar bo‘lsa, u holda $\angle CDP$ burchak nimaga teng?

O‘quvchilar: $\angle CDP = \frac{\pi}{2} - \alpha.$

O‘qituvchi: $\angle ADC$ burchak nimaga teng?

O‘quvchilar: $\angle ABC$ burchak 2β bo‘lgani uchun, $\angle ADC$ burchak ham 2β bo‘ladi.

O‘qituvchi: demak, biz izlayotgan $\angle x$ burchak …?

O‘quvchilar: $\angle x = 2\beta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

O‘qituvchi: Shakl almashtirish bajarib sodda holga keltiring!

O‘quvchilar: $\angle x = 2\beta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \beta - \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \beta - \gamma$, bunda $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ ekanligidan foydalanildi.

Shu bilan 8-masala yechildi. Endi eng oxirgi, yakunlovchi masala qoldi.

Boshlang‘ich masala: markazlar orasidagi masofa nimaga teng?

O‘quvchilar: Kosinuslar teoremasidan foydalanamiz:

Kosinuslar teoremasini ΔO_1O_2D uchburchakka qo‘llab

$$d^2 = R^2 + 4R^2\sin^2\alpha - 4R^2\sin\alpha\cos(\beta - \gamma)$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi bu tenglikda ozgina shakl almashtirishni bajaraylik:

$$d^2 = R^2 + 4R^2\sin\alpha\,(\sin\alpha - \cos(\beta - \gamma)) =$$

$$= R^2 + 4R^2\sin\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\beta - \gamma)\right) =$$

$$= R^2 + 4R^2\sin\alpha\,(\cos(\beta + \gamma) - \cos(\beta - \gamma)).$$

Bu tenglikka yig‘indi va ayirmaning kosinusi formulasidan, yoki kosinuslar yig‘indisi va ayirmasi formulasidan foydalanilib, yig‘indidan ko‘paytmaga o‘tamiz:

$$d^2 = R^2 - 8R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Ixtiyoriy uchburchak uchun sinuslar teoremasi Sizga ma’lum:

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin 2\beta} = \frac{c}{\sin 2\gamma} = 2R.$$

Bu munosabatlardan uchburchak tomonlarini topamiz:

$$a = 2R\sin 2\alpha\,, \quad b = 2R\sin 2\beta\,, \quad c = 2R\sin 2\gamma.$$

Endu uchburchak yuzini topishning quyidagi ikki - $S = r\frac{a+b+c}{2}$ va $S = \frac{1}{2}ab\sin 2\gamma$ formulasidan $r\frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}ab\sin 2\gamma$ tenglikni yozib, a, b, c larning o‘rniga topilgan qiymatlarni qo‘yib, tenglikni soddalashtiring:

$$r = \frac{4R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma}{2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} = \frac{2R\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}.$$

Endi kasrning maxrajiga shakl almashtirish bajaraylik:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin\big(\pi - 2(\alpha + \beta)\big) =$$

$$= 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin 2(\alpha + \beta) =$$

$$= 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= 2\sin(\alpha + \beta)\,(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\cos\alpha\cos\beta = 4\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$$

Bu tenglikni kasrning maxrajiga qo‘yib, suratiga ikkilangan burchakning sinusi formulasidan foydalanib, ifodani soddalashtiring.

Bundan ko‘rinib turibdiki $r = 4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ munosabatni hosil qilish mumkin. Bu tenglikni topilgan markazlar orasidagi masofa formulasiga qo‘ysak $d^2 = R^2 - 2Rr$ tenglik hosil bo‘ladi.

XULOSA

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan masalani bir nechta sodda masalalarga bo‘lib, so‘ngra muloqot tarzida mashg‘ulot olib borish o‘quvchilarda geometrik tushunchalarni rivojlantiradi, shu bilan birga fikrlar xilma-xilligi ularda to‘g‘ri xulosalar chiqarishga xizmat qiladi.

Bu esa o‘quvchilarning matematik tafakkurini kengaytirib, kelajakda o‘zi tanlagan sohasida uchraydigan muammolarning eng maqbul yechimini topishga yordam beradi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Рожков З.И., Курдеванидзе Г.Д., Панфилов Н.Г. (1987) *Сборник задач математических олимпиад*. М.: Изд-во УДН.

2. Rahimqoriyev A.A., Toxtaxodjayeva M.A. (2019). *Geometriya*, Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8-sinflari uchun darslik. T.: “O‘zbekiston”.

3. B. Xaydarov, E. Sariqov, A. Qo‘chqorov. (2019). *Geometriya*, Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik. Toshkent.