DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.13820970

UZLUKSIZ, DIFFERENSIYALANUVCHI VA INTEGRALLANUVCHI FUNKSIYALAR XOSSALARINING BA'ZI OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA QO'LLANILISHI

Aytjanova G.T.,
O'zbekiston Milliy universiteti
Email: gulayimaytjanova07@gmail.com

Nabixonov N.Y.,
O'zbekiston Milliy universiteti
Email: allajanovyakub@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada matematik analizdagi uzluksiz, differensiyallanuvchi va integrallanuvchi funksiyalar xossalari yordamida ayrim olimpiada masalalari yechilishini ko'rib chiqamiz. Bu yerdagi olimpiada masalalari talabalar o'rtasida o'tkazilgan xalqaro matematika olimpiadalaridan olingan.*

Kalit so'zlar: *funksiya, uzluksizlik, differensiallanuvchilik, kesma, interval, integrallanuvchilik, funksional tenglama.*

THE USE OF PROPERTIES OF CONTINUOUS, DIFFERENTIABLE, AND INTEGRABLE FUNCTIONS TO SOLVE SOME OLYMPIAD PROBLEMS

Abstract: *This article is about using properties of continuous, differentiable, and integrable functions in mathematical analysis to solve some math problems. The olympiad problems in this article are taken from the previous international students' math olympiads.*

Keywords: *function, continuity, differentiability, integrability, segment, interval, functional equation.*

1. *Uzluksiz funksiyalar xossalarining qo'llanilishi*

f funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lsa bu funksiya ushbu nuqtada uzluksiz deb ataladi. Aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan funksiya uzluksiz funksiya deb ataladi.

1-masala. $f(0)=1$ va $\forall x \in \mathbb{R}$ uchun $f(2x)-f(x)=x$ni qanoatlantiruvchi barcha

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uzluksiz funksiyalarni toping.

Yechilishi. Funksional tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2};$$

Xuddi shunday quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{4},$$

$$f\left(\frac{x}{4}\right)-f\left(\frac{x}{8}\right)=\frac{x}{8},$$

$$\ldots$$

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{x}{2^n}.$$

Yuqoridagi tengliklarni qo'shib quyidagi tenglikka erishamiz

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right),$$

bunda n cheksizga intilganda $f(x)-1=x$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $f(x)=x+1$ yagona yechim.

2-masala. $\forall x \in \mathbb{R}$ uchun $f(x)=f(x^2)$ ni qanoatlantiruvchi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uzluksiz

funksiya berilgan bo'lsin. f funksiyaning o'zgarmas funksiya ekanligini isbotlang.

Yechilishi. Masala shartiga binoan $f(x)=f(-x)$ ni hosil qilamiz. Shu sababli,

$f$ni $[0,\infty)$ da o'zgarmaslikka tekshirish yetarli. $x\geq 0$uchun ushbu $(x_n)\geq 0$ rekursiv ketma-ketlikni aniqlaymiz, bunda $x_0=x$ va $x_{n+1}=\sqrt{x_n}, n\geq 0$. U holda

$$f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)=\ldots=f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Hamda $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, agar $x > 0$bo‘lsa. Bundan kelib chiqadiki f o‘zgarmas funksiya va masala yechildi.

2. Differensiallanuvchi funksiyalar xossalarining qo‘llanilishi

Roll teoremasi. Agar $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz, (a, b) intervalda

differensiallanuvchi va $f(a) = f(b)$ o‘rinli bo‘lsa , u holda $\exists c \in (a, b)$ bunda $f'(c) = 0$

bajariladi.

1-masala. Lejandr polinomining $(-1,1)$ intervalda n ta turli ildizi borligini isbotlang:

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

Yechilishi. Polinom funksiyani quyidagicha olaylik : $Q_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Ushbu

ko‘phad n karrali $x = 1$ va $x = -1$ ildizlarga ega**.** Shuning uchun ixtiyoriy $k < n$ uchun

k - tartibli hosila $Q_n^{(k)}(x)$ 1 va -1 kabi ildizlari bor. Induksiya usuli orqali $k$ga nisbatan

$(1 < k \leq n)$ $Q_n^{(k)}(x)$ ning $(-1,1)$ da k ta turli ildizlari borligini isbotlaymiz.

Roll teoremasiga ko‘ra bu $k = 1$uchun orinli. Faraz qilaylik bu xossa $k < n$ uchun o‘rinli bo‘lsin va $k + 1$ uchun isbotlaylik. $Q_n^{(k)}(x)$ ko‘phad $k + 2$ta ildizga ega,

bunda $x_0 = -1 < x_1 <\ldots< x_k < x_{k+1} = 1$. Roll teoremasiga ko‘ra ixtiyoriy ikkita ketma-ket

keluvchi ildizlar orasida $Q_n^{(k+1)}(x)$ ning ildizi mavjud. Shu sababli $Q_n^{(k+1)}(x)$ ko‘phad $k + 1$

ta turli -1 va 1 orasida yotuvchi ildizlari mavjud. Bu esa induksiyani qanoatlantiradi.

2-masala. $P(x) = x^4 - \sqrt{7}x^3 + 4x^2 - \sqrt{22}x + 15$ ko‘phadning barcha ildizlari haqiqiy
emasligini isbotlang.

Yechilishi. Agar $P(x)$ ko‘phadning barcha ildizlari haqiqiy bo‘lsa, unda Roll teoremasiga ko‘ra $P'(x)$ ko‘phadning barcha 3 ta ildizi haqiqiy, natijada $P''(x) = 12x^2 - 6\sqrt{7}x + 8$ ko‘phadning har ikkala ildizi haqiqiyligi kelib chiqadi. Lekin bu
kvadratik ko‘phadning diskriminanti -132 va bu manfiy, shu sababli u kompleks ildizlarga ega. Ushbu ziddiyatdan $P(x)$ ko‘phadning barcha ildizlari haqiqiy emasligi kelib chiqadi.

3. *Integrallanuvchi funksiyalar xossalarining qo‘llanilishi*

Xossa. Agar $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ musbat, uzluksiz funksiya bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bunda tenglik faqat va faqat f aynan nolga teng bo‘lgandagina o‘rinli.

1-masala. Quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ uzluksiz
funksiyalarni toping:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)dx$$

Yechilishi. Birinchidan, ikkala integral ostidagi funksiyalar o‘zgaruvchilarini bir o‘zgaruvchiga keltirishimiz kerak. Birinchi integraldagi almashtirish tufayli $\int_0^1 f(x^2)2xdx$ integralga ega bo‘lamiz. Endi esa, $\frac{1}{3}$ ni integral ko‘rinishida yozsak, $\int_0^1 x^2dx$ga ega bo‘lamiz. Natijada berilgan tenglik quyidagicha bo‘ladi:

$$\int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 f^2(x^2)dx$$

bu esa ushbu tenglikka teng kuchli

$$\int_0^1 [f^2(x^2) - 2xf(x^2) + x^2]\, dx = 0$$

Integral ostidagi funksiya nomanfiy, chunki $f^2(x^2) - 2xf(x^2) + x^2 = (f(x^2) - x)^2$.

Shuning uchun yuqoridagi xossa bo‘yicha $f(x^2) = x$ga ega bo‘lamiz, bundan esa $f(x) = \sqrt{x}$ yagona yechimni topamiz.

2-masala. Quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiyalarni aniqlang:

$$\int_0^1 f(x)(x - f(x))dx = \frac{1}{12}$$

Yechilishi. Masala shartidagi tenglama quyidagicha qayta yozilishi mumkin, $\int_0^1 (xf(x) - f^2(x))dx = \int_0^1 \frac{x^2}{4}dx$. Hamma qo‘shiluvchilarni bir tomonga o‘tkazamiz:

$$\int_0^1 \left(f^2(x) - xf(x) + \frac{x^2}{4}\right) dx = 0$$

bundan , yuqoridagi xossa bo‘yicha $f(x) = \frac{x}{2}, x \in [0,1]$ ni hosil qilamiz.

Adabiyotlar:

[1] Rozvan Gelca, Titu Andrescu, *Putnam and Beyond*, - Springer Science+Business Media, LLC, 2007, P. 128, 138, 156.

[2] Teodora-Liliana T. Radulescu, Vicen¸tiu D. Radulescu, Titu Andreescu, *Problems in Real Analysis. Advanced Calculus on the Real Axis,*- Springer Science+Business Media, LLC 2009. P. 139-151, 183-192.

[3] Azlarov T., Mansurov H., Matematik analiz, - Toshkent, “O‘qituvchi”, 1994, 151-153-b.

[4] Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A., Matematik analizdan ma’ruzalar, - Toshkent, “Voris-nashriyot”, 2010, 133-b.

[5] www.aops.com internet sayti.

[6] https://math.stackexchange.com/ internet sayti.

[7] http://www.imc-math.uk/ internet sayti.