DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.13761898

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРОЙ

Миратоев З.М., Маншуров Ш.Т
Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета
miratoyev2014@mail.ru, manshurov_sh@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются краевые задачи для уравнений с неоднородной структурой, которые являются важным классом математических задач, возникающих в различных прикладных областях. Исследуются методы решения таких задач, включая анализ существования и единственности решений, а также особенности поведения решений в зависимости от характеристик неоднородности. Приводятся примеры из физики, инженерии и других дисциплин, где данные уравнения находят практическое применение. Исследования неклассических уравнений математической физики сравнительно новое направление в теории краевых задач. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением к различным задачам механики и физики. Различные классы таких задач подробно исследованы в работах А.В.Бицадзе, В.Н.Врагова [1], Ф.М.Муминова [2].

Ключевые слова: *Краевые задачи; Уравнения с неоднородной структурой; Математическое моделирование; Анализ существования и единственности решений; Численные методы; Прикладные науки; Физические процессы; Инженерные задачи; локаль, нелокаль, нелокальная задача, негативная пространства, сопряженная уравнения.*

Введение

Краевые задачи для уравнений с неоднородной структурой представляют собой важный раздел математического анализа, охватывающий широкий спектр задач, возникающих в различных прикладных областях науки и техники. Эти уравнения включают как уравнения в частных производных, так и уравнения с переменными коэффициентами, что делает их решение более сложным и многогранным.

Современные исследования в этой области сосредоточены на анализе существования и уникальности решений краевых задач, а также на разработке эффективных численных методов для их решения. Уравнения с неоднородной структурой встречаются в моделировании физических процессов, таких как теплопередача, деформация материалов и динамика жидкостей, а также в инженерных приложениях, связанных с проектированием и оптимизацией различных систем[1]-[2].

Анализ краевых задач для уравнений смешанного типа в ограниченных областях: условия существования решений и их особенности

Пусть $G \subset R^p -$ ограниченная область переменных $x=(x_1, x_2, ..., x_p)$ с гладкой границей γ. В области $D = G \times (0;T)$ рассмотрим уравнение [3]-[5]

$$Lu \equiv K(t)u_{tt} + \Delta_x u + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x;t). \tag{1}$$

Предположим, что коэффициенты оператора $L -$ достаточно гладкая в $\overline{D}$ функции. Уравнение (1) в различных частях области D может быть эллиптического, параболического и гиперболического типов в зависимости знака функции $K(t)$ на $(0;T)$ [6]-[8]. Постановка краевых задач для уравнения (1) существенно зависит от знака $K(t)$ при $t=0$ и $t=T$.

Рассмотрим следующие задачи:

Найти решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условиям $u_{|\gamma} = 0$ и

1) если $K(t) \geq 0 \geq K(0)$, то

$$u(x,T) = \mu u(x,0) \tag{2}$$

2) если $K(0) > 0,\ K(T) \geq 0$, то

$$\begin{aligned} u(x,T) &= \mu u(x,0), \\ u_t(x,0) &= m u_t(x,T). \end{aligned} \tag{3}$$

3) если $K(0) \leq 0,\ K(T) < 0$, то

$$\begin{aligned} u(x,T) &= \mu u(x,0), \\ u_t(x,T) &= n u_t(x,0). \end{aligned} \tag{4}$$

4) если $K(0) > 0 > K(T)$, то

$$u(x,T)=\mu u(x,0),\quad u_t(x,0)=u_t(x,T)=0. \tag{5}$$

Всюду ниже будет предполагать, что $-1\le\mu\le 1$. Рассмотрим вначале случай $|\mu|<1$.

Обозначим через $H(D)$ пространство, образованное замыканием гладких в D функций по норме [6-8]

$$\|u\|_H=\left[\int_D\left(k^2u_{tt}^2+\left(D_x^\beta u\right)^2\right)dD\right]^{\frac{1}{2}}+\|u\|_{W_2^{'}},\ |\beta|=2.$$

Теорема. Пусть $f\in L_2(D),\nabla_x f\in L_2(D)$, $f(x,t)=0,\ x\in\gamma$ в области D выполнено условие [9-12]

$$\alpha(x,t)-\frac{1}{2}K_t(t)\ge\delta>0,\ -c(x,t)\ge 0,\ -c_1(x,t)\ge 0 \tag{6}$$

и существует постоянная $\lambda:0<\lambda\max_t|K(t)|\le\delta$ такая, что $|\mu|\le e^{-\lambda T/2}\max_x\sqrt{\frac{c(x,0)}{c(x,T)}}$,

$$|m|\le e^{-\lambda T/2}\sqrt{\frac{K(T)}{K(0)}},\ |n|\le e^{-\lambda T/2}\sqrt{\frac{K(0)}{K(T)}}. \tag{7}$$

Тогда существует единственное решение задач (1)-(4) из пространство $H(D)$. Если дополнительно известно, что $f_t\in L_2(D)$ и в области D

$$\alpha(x,t)+\frac{1}{2}K_t(t)\ge\delta>0, \tag{8}$$

то решения задач (1)-(4) будут такие, что $u\in W_2^2\left(G\times(t_1,t_2)\right)$, где $K(t_i)\ne 0,\ (i=1,2)$.

Доказательство. Рассмотрим регуляризованное уравнение

$$L_\varepsilon u^\varepsilon\equiv-\varepsilon u_{ttt}^\varepsilon e^{-\lambda t}+Lu^\varepsilon=f,\ \varepsilon>0, \tag{9}$$

и задачи: найти решение уравнения (9) в области D, удовлетворяющее условиям:

$u^{\varepsilon}{}_{|\gamma\times[0,T]}=0$ и в случае задачи (1) [13-16]:

$$u^{\varepsilon}(x,T)=\mu u^{\varepsilon}(x,0),$$
$$u_t^{\varepsilon}(x,T)=u_t^{\varepsilon}(x,0),\ u_{tt}^{\varepsilon}(x,T)=e^{-\lambda T}u_{tt}(x,0), \tag{10}$$

в случае задачи 2)-

$$u^{\varepsilon}(x,T)=\mu u^{\varepsilon}(x,0),\ u_t^{\varepsilon}(x,0)=mu_t^{\varepsilon}(x,T),$$
$$u_{tt}^{\varepsilon}(x,T)=mu_{tt}^{\varepsilon}(x,0), \tag{11}$$

в случае задачи 3)-

$$u^{\varepsilon}(x,T)=\mu u^{\varepsilon}(x,0),\ u_t^{\varepsilon}(x,T)=nu_t^{\varepsilon}(x,0),$$
$$nu_{tt}^{\varepsilon}(x,T)=u_{tt}^{\varepsilon}(x,0), \tag{12}$$

в случае задачи 4)-

$$u^{\varepsilon}(x,T)=\mu u^{\varepsilon}(x,0),\ u_t^{\varepsilon}(x,0)=u_t^{\varepsilon}(x,T)=0. \tag{13}$$

Решения задачи (9), (10)-(13) будем искать в виде (индекс ε опускаем)

$$u^{\nu}(x,t)=\sum_{k=1}^{\nu}C_k^{\nu}(t)\varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ базис пространства $W_2^2(G)\cap W_2^{'}(G)$ составленной из собственных функций задачи

$$-\Delta_x\varphi_k=\lambda_k\varphi_k,\ \varphi_k{}_{|\gamma}=0.$$

Функции $C_k^{\nu}(t)$ определим из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int_G\varphi_k L_{\varepsilon}u^{\nu}dG=\int_G\varphi_k\, fdG,\ k=\overline{1,\nu}, \tag{14}$$

и условий (10)-(13) (в зависимости от задачи), где вместо $u^{\varepsilon}(x,t)$ стоит $C_k^{\nu}(t),\ (k=\overline{1,\nu})$.

Разрешимость задача (14) с соответствующими краевыми условиями следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из (14)

$$\int_D u_t^\nu fe^{\lambda t}dD = \int_D u_t^\nu e^{\lambda t} L_\varepsilon u^\nu dD = \varepsilon \int_D (u_{tt}^\nu)^2 dD +$$

$$+\int_D (\alpha - \frac{1}{2}K_t - \frac{\lambda}{2}k)e^{\lambda t}(u_t^\nu)^2 dD + \frac{1}{2}\int_D (\nabla_x u^\nu)^2 e^{\lambda t} dD -$$

$$-\frac{1}{2}\int_D (C_t + \lambda C)(u^\nu)^2 e^{\lambda t} dD - \frac{1}{2}\int_\Gamma [k(u_t^\nu)^2 + C(u^\nu)^2]e^{\lambda t} n_t dT.$$

Используя условия (6) и граничные условия получим при $0 < \lambda \max|K(t)| \le \delta$

$$\int_D u_t^\nu e^{\lambda t} fdD \ge \varepsilon \|u_{tt}\|_{L_2}^2 + \frac{\delta}{2}\|u_t^\nu\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla_x u^\nu\|_{L_2}^2 .$$

Следовательно

$$\|u^\nu\|_{W_2^2}^2 + \varepsilon \|u_{tt}^\nu\|_{L_2}^2 \le C\|f\|_{L_2}^2 . \quad (15)$$

Здесь и далее через с обозначим, вообще говоря различные положительные постоянные, не зависящие от ε и ν.

Аналогично из (14)

$$\int_D \Delta_x u_t^\nu e^{\lambda t} fdD = \int_D \Delta_x u_t^\nu e^{\lambda t} L_\varepsilon u^\nu dD \ge \varepsilon \|\nabla_x u_{tt}^\nu\|_{L_2}^2 + \frac{\delta}{2}\|\nabla_x u_t^\nu\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|\nabla_x u^\nu\|_{L_2}^2 - C\|f\|_{L_2}^2 .$$

Отсюда

$$\|\nabla_x u_t^\nu\|_{L_2} + \|\Delta_x u^\nu\|_{L_2} \le C\left[\|f\|_{L_2} + \|\nabla_x f\|_{L_2}\right]. \quad (16)$$

Получим теперь равномерные по ε и ν оценки u_{tt}^ν вблизи оснований цилиндра D в случае граничных условий (11)-(13). Рассмотрим функцию $\varphi_i(t) \in C^\infty[0,T]$ [17-19]

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, \ 0 \le t \le \dfrac{\sigma}{2}, \\ 0, \ \sigma \le t \le T - \sigma, \\ \dfrac{e^{\lambda t}}{m^2}, \ T - \dfrac{\sigma}{2} \le t \le T, \ при \ m \ne 0, \ и \ 0 \ при \ m = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}-1,\ T-\dfrac{\sigma}{2}\le t\le T,\\ 0,\ \sigma\le t\le T-\sigma,\\ \dfrac{e^{-\lambda T}}{n^2},\ 0\le t\le\dfrac{\sigma}{2},\ при\ n\ne 0,\ и\ 0\ при\ \ n=0.\end{cases}$$

$$\varphi_3(t)=\begin{cases}1,\ 0\le t\le\dfrac{\sigma}{2},\\ 0,\ \sigma\le t\le T-\sigma,\ \varphi_3(t)>0,\ 0\le t<6\delta,\\ -1,\ T-\dfrac{\sigma}{2}\le t\le T,\ \varphi_3(t)<0,\ T-\sigma<t\le T.\end{cases}$$

Здесь φ выбрано так, чтобы $0<2\sigma<T$, и если $K(0)\ne 0$ и $K(T)\ne 0$, то $|K(t)|>k_0$, при $0<t<\sigma,\ T-\sigma<t<T$ соответственно. Если u^ν удовлетворяет условиям (11) (соответственно (12), или (13)), то из (14)

$$\int_D u_{tt}^\nu\varphi_i fdD=\int_D u_{tt}^\nu\varphi_i L_\varepsilon u^\nu dD\ge\frac{1}{2}\int_D k\varphi_i(u_{tt}^\nu)^2dD-C\|f\|_{L_2}^2.$$

Отсюда

$$\left\|\sqrt{|\varphi_i|}u_{tt}^\nu\right\|_{L_2}\le C\|f\|_{L_2}, \tag{17}$$

где $i=1$ (соответственно $i=2$, или $i=3$).

Из ограниченной в пространстве $H(D)$ последовательности $\{u_\varepsilon^\nu\}$ извлечен слабосходящуюся к функции и подпоследовательности $\{u_{\varepsilon_i}^{\nu_i}\}$. Из равенств (14) после предельного перехода при $\nu_i\to\infty,\ \varepsilon_i\to 0$ получим

$$-\int_D u_t(kv)_t dD+\int_D(\Delta_x u+\alpha u_t+Cu-f)vdD=0$$

для всякой функции $v\in L_2,\ v_t\in L_2,\ v(x,0)=v(x,T)=0$.

Следовательно, $u-$ решение задачи (9), (10), (9)-(13) и $u\in H(D)$.

Единственности полученных решений следует из неравенства

$$\int_D u_t e^{\lambda t}LudD\ge C\|u_t\|_{L_2}^2,$$

которое доказывается интегрированиям по частям.

Граничные условия (3)-(5) задач 2) – 4) на u_t, очевидно, выполнены, так как вблизи оснований цилиндра D из оценок (17) следует, что $u_{tt} \in L_2$.

Пусть теперь выполнено условие (8) теоремы. Так же как в (17) получим оценки u_{tt} в L_2 в окрестности плоскостей $t = t_1$, где $0 < t_1 < t_2 < T$ и $K(t_i) \neq 0$. Пусть $\psi(t) \in C^\infty[0,T]$:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, \ t_1 \le t \le t_2, \\ 0, \ 0 \le t < t_1 - \sigma, \ t_2 + \sigma_2 \le t \le T. \end{cases}$$

Здесь $\sigma_1 > 0 -$ достаточно мало. Из (14)

$$-\int_D u_{ttt}^\nu \psi \, f dD = -\int_D u_{ttt}^\nu \psi L_\varepsilon u^\nu dD \ge \sigma \int_D \psi (u_{tt}^\nu)^2 dD - C\|f\|_{L_2}^2.$$

Отсюда

$$\left\| \sqrt{\psi} u_{tt}^\nu \right\|_{L_2} \le C\|f\|_{L_2}. \tag{18}$$

Из (18) следует, что для предельной функции $u, u_{tt} \in L_2 \in (G \times (t_1, t_2))$. **Теорема доказана.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В.И. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983, 84с.
2. Врагов В.И. Об одной уравнений смешанно-составного типа.
3. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа. Central Asian Journal of mathematical theory and computer sciences. 2021. Issue: 04. April. ISSN:2660-5309.
4. Муминов Ф.М., Душатов Н.Т. О нелокальной краевой задачи для линейных уравнений смещенного типа. Central Asian Journal of theoretical and applied sciences. 2021. Vol.02/ Issue: 05. may. ISSN:2660-5309.
5. Fayzudinovich, S. I. (2021). To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compound Type. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science, 2(4), 23-32.
6. Сраждинов, И. Ф. (2021). Начально-краевая задача для одной системы составного типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(3), 41-47.

7. Сраждинов, И. Ф. (2021). Смешанная Задача Для Одной Особой Системы Составного Типа С Коэффициентом Чебышева-Эрмита. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(10), 47-52.
8. Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Ибодуллаева, М. Ш. (2022). ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(6), 606-612.
9. FM Muminov, NT Dushatov, ZM Miratoev. (2024). ON THE FORMULATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE SECOND-ORDER EQUATION. American Journal Of Applied Science And Technology. 4(6), 58-63.
10. ФМ Муминов, ЗМ Миратоев. (2024). КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА. UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(13), 11-16.
11. Bulanova Yu.A., Sadykov S.S., Samandarov I.R., Malikov M.N., Mansurov Sh.T. Research on the choice of algorithms for recognizing neoplasms on mammograms // Zibaldone. Estudios Italiano. -2023- Vol.X, Issue 2. -C. 502-511.
12. Холикулов Д.Б., Самандаров И.Р. (2024) ПОДГОТОВКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЫ ОКИСЛЕННЫХ МЕДНЫХ РУД МЕСТОРОЖДЕНИЙ КАЛЬМАКИР К ЛАБОРАТОРНЫМ ИСПЫТАНИЯМ. 4(6), 202-211.
13. Dildora Sulaymanova, Yulduzoy Abduganieva, Zokhidjon Miratoev., E3S Web of.conf. 443 03006 (2023)
14. Dildora Sulaymanova, Yulduzoy Abduganieva, Zokhidjon Miratoev., E3S Web of.conf. 443 03007 (2023)
15. Sulaymanova D. B. The Importance of Programs in Creating Electronic Textbooks. Texas Journal of Multidisciplinary Studies. ISSN NO: 2770-0003https://zienjournals.comMarch 2024.pp18-21. https://www.zienjournals.com/index.php/tjm/article/view/5120
16. Sulaymanova D.B. The social development circumstances of children in alternative care and in closed institutions. International Journal of Philosophical Studies and Social Sciences.2022/1/4.pp. 56-60. https://ijpsss.iscience.uz/index.php/ijpsss/article/view/138
17. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative,

educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7

18. Azizova Kh.M., N.T. Kattaev.,T.M. Babaev., D. Adinaeva., M.N. Jumaev A new granulated sorbent based on acrylonitrile: synthesis and physico-chemical properties.// BIO Web of Conferences 95, 01043 (2024) CIBTA-III-2024 http://doi.org/10.1051/bioconf/20249501043
19. Azizova Kh.M., Kasun Dissanayake., Mohamed Rifky., Dulangana Hunupolagama., Jaladeen Mohamed Harris., Kurbonalijon Zokirov., Sanaev Ermat., Murodjon Samadiy Inorganic additives in meat production and processing.// E3S Web of Conferences 510, 01028 (2024) https://doi.org/10.1051/e3sconf/202451001028 ESDCA2024