DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.13761854

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Маншуров Ш.Т., Миратоев З.М.
E-mail: manshurov_sh@mail.ru, miratoyev2014@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматривается граничная задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Исследование фокусируется на изучении особенностей решения данной задачи, учитывая переходные зоны, где тип уравнения меняется с гиперболического на эллиптический или наоборот. Приводятся методы нахождения решений, анализируются их устойчивость и уникальность. Особое внимание уделено существованию и поведению решений в окрестности граничных условий, а также влиянию нелинейных факторов на общую структуру решения. Результаты исследования могут найти применение в различных областях науки и техники, где встречаются подобные задачи.

***Ключевые слова**: граничная задача; нелинейное уравнение; уравнение смешанного типа; гиперболическое уравнение; эллиптическое уравнение; устойчивость решений; уникальность решений; метод решения; переходные зоны; математическая физика.*

I. Введение

Граничные задачи для нелинейных уравнений занимают важное место в современной математике и ее приложениях. В частности, задачи, связанные с уравнениями смешанного типа, представляют собой особый интерес из-за их сложности и широкого спектра применений. Уравнения смешанного типа возникают в различных областях науки и техники, включая гидродинамику, теорию упругости, аэродинамику и квантовую механику. Они характеризуются тем, что в зависимости от области определения могут менять свой тип с гиперболического на эллиптический, что создает дополнительные трудности при их исследовании.

Целью данной работы является изучение граничной задачи для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Основное внимание будет уделено анализу существования и единственности решений, а также исследованию их устойчивости. Важной задачей является разработка методов, которые позволяют находить решения в областях с различными типами уравнений, а также изучение поведения решений в переходных зонах.

Введение включает в себя краткий обзор существующих методов решения подобных задач и описывает основные трудности, связанные с исследованием нелинейных уравнений смешанного типа. Также в нем обосновывается актуальность рассматриваемой темы и ее значение для дальнейшего развития теории и практики в данной области.

II. Математическая постановка задачи

Рассмотрим нелинейное уравнение смешанного типа в области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть уравнение имеет следующий вид:

$L(u)=F(x,u, \partial u, \partial^2 u)=0,\ x\in\Omega$

где $u=u(x)u$ — искомая функция, ∂u и $\partial^2 u$ — градиент и матрица вторых производных функции u соответственно, а $F(x, u, \partial u, \partial^2 u)$ — нелинейный оператор, зависящий от точки x, функции u и ее производных.

Тип уравнения L(u) меняется в зависимости от положения точки x в области Ω. В некоторых подмножествах области Ω уравнение может быть гиперболическим, в других — эллиптическим. Переходные зоны, в которых тип уравнения меняется, играют ключевую роль в постановке задачи и требуют особого внимания.

Для решения граничной задачи необходимо задать граничные условия на границе области ∂Ω. Пусть для u(x) на ∂Ω задаются следующие граничные условия:

$$B(u, \partial u)/_{\partial\Omega}=g(x)$$

где $B(u, \partial u)$ — оператор граничных условий, а g(x) — заданная функция на границе ∂Ω [1-4].

Таким образом, математическая постановка задачи заключается в нахождении функции u(x), которая удовлетворяет уравнению L(u)=0 в области Ω и граничным условиям на ∂Ω. Основными вопросами, которые необходимо исследовать, являются существование, единственность и устойчивость решения задачи, а также поведение решения в переходных зонах между областями с различным типом уравнения.

Формулировка нелинейного уравнения и условий на границе

Рассмотрим уравнение [5-8]:

$$LU = K(x;y)\,U_{yy}+U_{xx}+\alpha(x;y)\,U_y+b(x;y)U+m|u|^{\rho}U = f(x;y) \qquad (1)$$

где К(x,y)–непрерывно дифференцируемая функция , причем $K(x,y)\geq 0$ при $y\geq 0, K(x,y)<0$ при $y<0,\ a(x,y)\in \bar{C}(D), b(x,y)\in C^1(\bar{D})$ $, m<0,\ p>0$

Область D– которая состоит при y>0 из прямоугольника с вершинами в точках A(0; 0), B(1;0), A_1(0;1), B_1(1;1), а при y<0 ограничена характеристиками уравнения (1)

$$S_1=\left\{(x;y):\frac{dx}{dy}=-\sqrt{-K}, y(0)=0, y<0\right\}$$

$$S_2=\left\{(x;y):\frac{dx}{dy}=-\sqrt{-K}, y(0)=0, y<0\right\}$$

Положим $S=S_1\cup S_2$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области D такое, что

$$U(0;y)=U(1;y)=0 \tag{2}$$

$$U(x;1)=\beta(x)\,U(x;y)/_S \tag{3}$$

Всюду ниже предполагается что, y∈S. $\beta(x)=\exp\left[\frac{\lambda}{p+2}(-1+y)\right], \lambda>0, y\in S.$

Где y<0 Через $W_2^1(D)$ обозначим под пространство функций из пространства $W_2^1(D)$ которые удовлетворяют краевым условиям (2)-(3)

Определение 1. Функции и $(x;y)\in W_2^1(D))$ называется обобщенным решением задачи (1)-(3), если выполнено интегральное тождество.

$$\int_d\left[-U_y(KV)_Y-U_xV_x+a(x;y)U_yV+bUY+m|U|^\rho UV\right]dD=\int_D fVdD$$

для любой функции V из $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$ [9-14].

Существование обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) установим с помощью метода Галеркина. Пусть $\{\varphi_n(x,y)\}$–множество функций из пространства $W_2^1(D)$ обладающее тем свойством, что все $\varphi_n(x,y)$ линейно независимы, а их линейные комбинации плотны в этом пространстве. Такое множество, как известно [1], [4] существует.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$lW_n=e^{-\lambda y}W_{ny}(x;y)=\varphi_n(x;y) \tag{5}$$

$$W_n(x;1)=\beta(x)W_n(x;y)\big/_S \tag{6}$$

Решение задачи (5)-(6)

$$W_n(x,y)=\int_s^y e^{\lambda\tau}\varphi_n(x;\tau)dt+\frac{1}{\beta-1}\int_S e^{\lambda t}\varphi_n(x;t)dt$$

Ясно, что $W_n(x,y)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum_{n=1}^{N} C_n W_n = 0$ для какого-нибудь набора W_1, W_2, …, W_n то действуя на эту сумму оператором L, имеем

$$\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x;y) = 0 \Rightarrow C_n = 0, \forall n$$

Ясно, что $W_n(x;y) \in W_2^1(D)$ нетрудно получить оценку

$$\|W_n\|^p_{L_p(D)} \le m\|\varphi_n\|^p_{L_p(D)}$$

Кроме того $W_n(x,y)$ удовлетворяет условиям (6) для любого n. Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

Где C_n постоянные, которые определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений виде

$$(LU^N_{,}U_n)_0 = (f_{,}U_n)_0, n = 1, N \qquad (7)$$

Разрешимость этой системы алгебраических уравнений следует из получаемых ниже априорных оценок для приближенных решений и [4] леммы «об остром угле»[15-19]

Лемма 1. Пусть выполнены условия $K(x;1) \ge 0$ и неравенства

$$2a(x;y) - K_y(x;y) - \lambda K(x;y) \ge \delta > 0$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\|U^N\right\|^2_{W_2^1(D)} + \left\|U^N\right\|^p_{L_p(D)} \le K_2 \qquad (8)$$

K_2 не зависит от n.

Доказательство. Умножим (7) на Cn суммируя по n от 1 до N получим тождество

$$\int_D e^{\lambda y} U_y^N LU^N dD = \int_D e^{\lambda y} U_y^N f dD \qquad (9)$$

Интегрируя левую часть равенство (9) но частям, получаем

$$\left[\lambda(U_y^N)^2 + (2a - \lambda K - Ky)(U_x^N)^2 + +\lambda(U^N)^2 + \frac{2m}{p}\left\|U^N\right\|^P\right] dD -$$

$$-\frac{e^\lambda}{2}\int_0^1 (U_x^N)^2 dx + \frac{e^\lambda}{2}\int_0^1 K(x;1)(U_y^N)^2 dx - \frac{e^\lambda}{2}\int_0^1 (U^N)^2 dx + \frac{1}{2}\int_S e^{\lambda y}\left[((U_y^N)^2 - K(U_y^N)^2 + m\left|U^N\right|^p + (U^N)^2)n_1 - 2(U_x^N)(U_y^N)n_2\right] ds$$

Где n=(n1 n2)– единичный вектор внутренний нормали к ∂D. Используя условия (3) и условия леммы получим неравенство (8). Вернемся к вопросу о разрешимости системы уравнений (7). Если записать ее в виде $\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}) = 0$, где $\vec{C} = (C_{1_m} .....C_{n_m})$ то как мы только что убедились умножая $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}), \overrightarrow{C})_0$ получаем оценку $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}), \overrightarrow{C})_0 \ge K_0\left\|U^N\right\|^2_{W_2^1(D)} - K_1$

В силу того, что линейная оболочка $L(W_1, W_2, ... W_m)$ есть конечномерное пространство, существует $K_2(m)$ такое, что значить, выполнено неравенство $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}), \overrightarrow{C})_0 \geq K_2(m)\sum_{S=1}^{N} C_S^2 - K_1 \geq 0$

Если $\vec{C}$ достаточно большая величина
А это условие “острого угла”, достаточное для разрешимости системы уравнений (7).

Теорема. Пусть выполнены условия леммы. Тогда для любой функции $f(x; y) \in L_2(D)$ существует обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. В силу оценки (8), последовательность $\left\{ |U^N|^p U^N \right\}$ ограничено в пространстве L_q где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда на основании (8) из последовательности $\{U^N\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2^1(D)$ к некоторой функции U(x,y) и последовательности $|U^N|^p U^N$ слабо сходится в Lq(D) к функции $q(x; y)$ $|U^N|^p U^N \to q(x; y)$ в L_q

Однако, но теореме вложение $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$ вполне непрерывно. Следовательно, мы можем считать, что подпоследовательность $U^N(x; y)$ сильно в $L_2(D)$ и почти всюду. Теперь применим лемму 1 из [2], [4] о предельной переходе в нелинейном члене в случае, когда из нее следует, что

$$q(x, y) = |U|^p U$$

Далее, переходя к пределу при $N \to \infty$ в (7) при фиксированном n, будем иметь равенство

$$\int_D \left[-U_y (K\varphi_n)_y - U_x \varphi_n + \alpha U \varphi_n + \beta(x; y) U \varphi_n + m|U|^p U \varphi_n \right] dD = \int_D f \varphi_n dD$$

Где функции $U(x; y)$ принадлежит $W_2^1(D)$. Отсюда в виду плотности $\{\varphi_n\}$ в пространстве $W_2^1(D)$ следует, что интегральное тождество $|4|$ справедливо для любой $V(x; y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$ теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Врагов В.И. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983, 84с.
2. Врагов В.И. Об одной уравнений смешанно-составного типа.
3. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа. Central Asian Journal of mathematical theory and computer sciences. 2021. Issue: 04. April. ISSN:2660-5309.
4. Муминов Ф.М., Душатов Н.Т. О нелокальной краевой задачи для линейных уравнений смещенного типа. Central Asian Journal of theoretical and applied sciences. 2021. Vol.02/ Issue: 05. may. ISSN:2660-5309.
5. Fayzudinovich, S. I. (2021). To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compound Type. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science, 2(4), 23-32.
6. Сраждинов, И. Ф. (2021). Начально-краевая задача для одной системы составного типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(3), 41-47.
7. Сраждинов, И. Ф. (2021). Смешанная Задача Для Одной Особой Системы Составного Типа С Коэффициентом Чебышева-Эрмита. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(10), 47-52.
8. Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Ибодуллаева, М. Ш. (2022). ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(6), 606-612.
9. FM Muminov, NT Dushatov, ZM Miratoev. (2024). ON THE FORMULATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE SECOND-ORDER EQUATION. American Journal Of Applied Science And Technology. 4(6), 58-63.
10. ФМ Муминов, ЗМ Миратоев. (2024). КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА. UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(13), 11-16.
11. Bulanova Yu.A., Sadykov S.S., Samandarov I.R., Malikov M.N., Mansurov Sh.T. Research on the choice of algorithms for recognizing neoplasms on mammograms // Zibaldone. Estudios Italiano. -2023- Vol.X, Issue 2. -C. 502-511.

12. Холикулов Д.Б., Самандаров И.Р. (2024) ПОДГОТОВКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЫ ОКИСЛЕННЫХ МЕДНЫХ РУД МЕСТОРОЖДЕНИЙ КАЛЬМАКИР К ЛАБОРАТОРНЫМ ИСПЫТАНИЯМ. 4(6), 202-211.
13. Dildora Sulaymanova, Yulduzoy Abduganieva, Zokhidjon Miratoev., E3S Web of.conf. **443** 03006 (2023)
14. Dildora Sulaymanova, Yulduzoy Abduganieva, Zokhidjon Miratoev., E3S Web of.conf. 443 03007 (2023)
15. Sulaymanova D. B. The Importance of Programs in Creating Electronic Textbooks. Texas Journal of Multidisciplinary Studies. ISSN NO: 2770-0003https://zienjournals.comMarch 2024.pp18-21. https://www.zienjournals.com/index.php/tjm/article/view/5120
16. Sulaymanova D.B. The social development circumstances of children in alternative care and in closed institutions. International Journal of Philosophical Studies and Social Sciences.2022/1/4.pp. 56-60. https://ijpsss.iscience.uz/index.php/ijpsss/article/view/138
17. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
18. Azizova Kh.M., N.T. Kattaev.,T.M. Babaev., D. Adinaeva., M.N. Jumaev A new granulated sorbent based on acrylonitrile: synthesis and physico-chemical properties.// BIO Web of Conferences 95, 01043 (2024) CIBTA-III-2024 http://doi.org/10.1051/bioconf/20249501043
19. Azizova Kh.M., Kasun Dissanayake., Mohamed Rifky., Dulangana Hunupolagama., Jaladeen Mohamed Harris., Kurbonalijon Zokirov., Sanaev Ermat., Murodjon Samadiy Inorganic additives in meat production and processing.// E3S Web of Conferences 510, 01028 (2024) https://doi.org/10.1051/e3sconf/202451001028 ESDCA2024