

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11109147>

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛАХ

¹Полатов А.М., ¹ГУО Вей, ²Одилов Ж.К.,

¹Национальный Университет Узбекистана,

²Каршинский государственный университет,

asad3@yandex.ru,

709333319@qq.com,

odilovjahongir1993@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В статье разработана численная модель решения осесимметрической задачи переноса тепла в трехмерных телах методом конечных элементов, разработан алгоритм решения и программное обеспечение. На основе вычислительного эксперимента показана численная сходимость решения задачи. Для неоднородной конструкции изучено влияния геометрических особенностей на температурное поле, анализируется тепловой поток при наличии в теле конструкции цилиндрической полости, прямоугольного или круглого сечения. Установлено, что в случае, если поверхность полости перпендикулярна направлению потока, тепло концентрируется в окрестности поверхности, а в случае - круглого сечения, поток тепла обтекает полость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд важных физических трехмерных задач может быть решен с использованием двумерных элементов. Многие трехмерные задачи теории поля обладают осевой симметрией. Примером является задача о радиальном потоке тепла через концентрические цилиндры с различными коэффициентами теплопроводности. Поток тепла в достаточно длинном цилиндре распространяется в обоих направлениях, в радиальном и осевом. Поток тепла не зависит от азимутального угла, если граничные условия не зависят от угла θ . Еще одним примером будет задача об осевой симметрии плоского течения воды к центру скважины. В этом случае характеристики течения не должны зависеть от азимутального угла θ .

Многие прикладные задачи связаны с переносом тепла, причем течение воды к скважине в пористой среде пример важной задачи гидродинамики. В

методе конечных элементов (МКЭ) основное изменение связано с порядком используемого элемента. Двумерные симметрические задачи становятся одномерными, а трехмерные осесимметрические задачи решаются с использованием двумерного элемента.

МКЭ [1] эффективный численный метод решения инженерных и физических задач механики твердого деформируемого тела, механики жидкости и газа, теплопроводности и др. Возникновение метода конечных элементов связано с решением задач в области космических исследований. Затем метод был применен к задачам теплопроводности и теории упругости. Принцип минимума потенциальной энергии сводит задачу к разрешающей системе алгебраических уравнений.

Работа [2] представляет собой руководство по МКЭ, позволяющему получать численные решения инженерных, физических и математических задач.

В статье представлен математический аппарат решения задач теплоизлучения МКЭ в двумерной области.

В статье [3] приводятся методы исследования задач теплопередачи современными численными методами. Обсуждаются приближенные методы решения задач теплопроводности.

Работа [4] посвящена изложению основ МКЭ - одного из наиболее эффективных современных методов численного решения инженерных, физических и математических задач с применением вычислительной техники.

Метод конечных элементов [5] эффективный численный метод решения инженерных и физических задач механики твердого деформируемого тела, механики жидкости и газа, теплопроводности и др. Возникновение метода конечных элементов связано с решением задач в области космических исследований. Затем метод был применен к задачам строительной механики и механики сплошных сред.

В работе [6] приведено описание общего подхода к решению задач теплопроводности МКЭ и приведены алгоритмы для разработки вычислительных методов.

В статье [7] на основе МКЭ исследуется решение двумерной задачи теплопроводности неоднородных тел. Для решения плоской задачи теплопроводности используется треугольный конечный элемент с прямолинейными сторонами. Приводятся основные выражения для треугольников при наличии точечных источников тепла. На основе разработанного программного обеспечения приводится численное решение конкретной задачи и изучено влияния неоднородностей на распределения поля температуры.

В данной статье разработана численная модель решения осесимметрической задачи переноса тепла в трехмерных телах МКЭ, разработан алгоритм решения и программное обеспечение. На основе вычислительного эксперимента показана численная сходимость решения задачи. Для неоднородной конструкции изучено влияния геометрических особенностей на температурное поле, анализируется тепловой поток при наличии в теле конструкции цилиндрической полости, прямоугольного или круглого сечения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается дифференциальное уравнение для квазистатических задач теории поля в цилиндрических координатах [1]:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + Q = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\varphi = \varphi_{\infty} \quad (2)$$

и

$$K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} l_r + K_{\theta\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} l_{\theta} + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_{\infty}) = 0 \quad (3)$$

где

φ - температура;

$K_{rr}, K_{\theta\theta}, K_{zz}$ - коэффициенты теплопроводности в соответствующих направлениях;

Q - источник тепла внутри тела, значение которого считается положительным, если тепло подводится к телу;

r - расстояние от оси симметрии до центра элемента;

h - коэффициент теплообмена;

φ_{∞} - температура окружающей среды;

l_r, l_z, l_{θ} - направляющие косинусы;

q - поток тепла.

Если трехмерное тело обладает геометрической симметрией относительно оси Oz, то это тело называют осесимметричным телом. Если к тому же исследуемая физическая величина не зависит от угла θ , то дифференциальное уравнение (1) сводится к следующему:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + Q = 0 \quad (4)$$

Граничные условия для уравнения (4) выражаются формулой (2) и следующим соотношением:

$$K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} l_r + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_\infty) = 0 \quad (5)$$

Вариационная формулировка задачи (4) и (5) связана с рассмотрением функционала:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[r K_{rr} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + r K_{zz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2rQ\varphi \right] dV + \int_{S_1} q\varphi dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} [\varphi^2 - 2\varphi\varphi_\infty + \varphi_\infty^2] dS \quad (6)$$

Матрица коэффициентов теплопроводности:

$$[D] = \begin{bmatrix} \bar{r}K_{rr} & 0 \\ 0 & \bar{r}K_{zz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

При этом \bar{r} означает расстояние от оси симметрии до центра элемента, а произведения $\bar{r}K_{rr}$ и т. д. должны быть вычислены для каждого элемента.

Конечно-элементное решение задачи

Функция формы для треугольных элементов φ определяется соотношением:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (8)$$

где

A - площадь конечного элемента;

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z), \quad N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j r + c_j z), \quad N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k r + c_k z)$$

$$a_i = R_j Z_k - R_k Z_j, \quad b_i = Z_j - Z_k, \quad c_i = R_k - R_j,$$

$$a_j = R_k Z_i - R_i Z_k, \quad b_j = Z_k - Z_i, \quad c_j = R_i - R_k,$$

$$a_k = R_i Z_j - R_j Z_i, \quad b_k = Z_i - Z_j, \quad c_k = R_j - R_i.$$

Условие экстремума функционала (6) для конечного элемента e приводит к следующей системе дифференциальных уравнений [1,8]:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = [k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\} \quad (9)$$

$$[k^{(e)}] = \int_{V^e} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \quad (10)$$

$$[f^{(e)}] = - \int_{V^e} (rQ) [N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2} h\varphi_{\infty} [N^{(e)}]^T dS \quad (11)$$

где

$e = 1, 2, \dots, n$, n - число конечных элементов,

V^e - объем конечного элемента;

$[N]$ - матрица функций формы;

$[B^e]$ - матрица производных от функции формы;

$[D^e]$ - матрица коэффициентов теплопроводности.

Объемный интеграл в $[k^{(e)}]$ задается формулой:

$$[k^e] = \frac{2\pi\bar{R}K_{rr}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{2\pi\bar{R}K_{zz}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (12)$$

здесь через \bar{R} обозначено произведение матриц:

$$\bar{R} = \frac{1}{12} [R_i, R_j, R_k] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

ибо объемный интеграл сводится к виду $\int r dV$ после того, как постоянные члены выносятся за знак интеграла. Действительно, учитывая зависимость $dV = 2\pi r dA$, запишем

$$\int r dV = 2\pi \int_A r^2 dA. \quad (14)$$

Радиальное расстояние r может быть выражено в L - координатах [1]:

$$r = L_1 R_i + L_2 R_j + L_3 R_k, \quad (15)$$

а величина r^2 , может быть представлена произведением:

$$r^2 = [R_i \quad R_j \quad R_k] \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2 L_2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3 L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Поверхностные интегралы в задачах переноса тепла вычисляются относительно просто. Для поверхностного интеграла, который входит в матрицу $[k^e]$, и рассмотрим сторону элемента между узлами j и k :

$$\int_{S_{jk}} h[N]^T [N] dS = h \int_{L_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} [0, L_2, L_3] 2\pi r dL =$$

$$2\pi h \int_{L_{jk}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & rL_3L_2 & rL_2L_3 \\ 0 & rL_2L_3 & rL_3L_2 \end{bmatrix} dL, \quad (17)$$

где

L_{jk} - длина стороны элемента между узлами j и k ;

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \quad (18)$$

Используя соотношение (15) для r , составляя соответствующие произведения и интегрируя с учетом (18), получаем:

$$\int_{S_{jk}} h[N]^T [N] dS = \frac{2\pi h L_{jk}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3R_j + R_k) & (R_j + R_k) \\ 0 & (R_j + R_k) & (R_j + 3R_k) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Второй интеграл в (10), в случае, когда конвекции подвержена сторона j и k конечного элемента, соответствует интегралу (19).

Поверхностный интеграл в $\{f^{(e)}\}$ имеет вид:

$$\int_{S_{ij}} h \varphi_\infty [N]^T dS = 2\pi h \varphi_\infty \int_{L_{ij}} \begin{bmatrix} rL_1 \\ rL_3 \\ 0 \end{bmatrix} dL = \frac{2\pi L_{ij} h \varphi_\infty}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Если заменить rK_{rr} и rK_{zz} на константы $\bar{r}K_{rr}$ и $\bar{r}K_{zz}$, то для объемного интеграла в $[k^e]$ имеем:

$$[k^e] = \frac{2\pi r^{-2} K_{rr}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{2\pi r^{-2} K_{zz}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (21)$$

здесь $\bar{r} = (R_i + R_j + R_k)/3$.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБСУЖДЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривается осесимметрическая задача переноса тепла, где требуется определение распределения температуры в конструкции (рис.1.а). Температура внутренней поверхности тела 500K , коэффициенты теплопроводности в соответствующих направлениях $K_{rr} = K_{zz} = 10\text{Вт}/(\text{см}\cdot\text{K})$, температура внешней поверхности тела 300K .

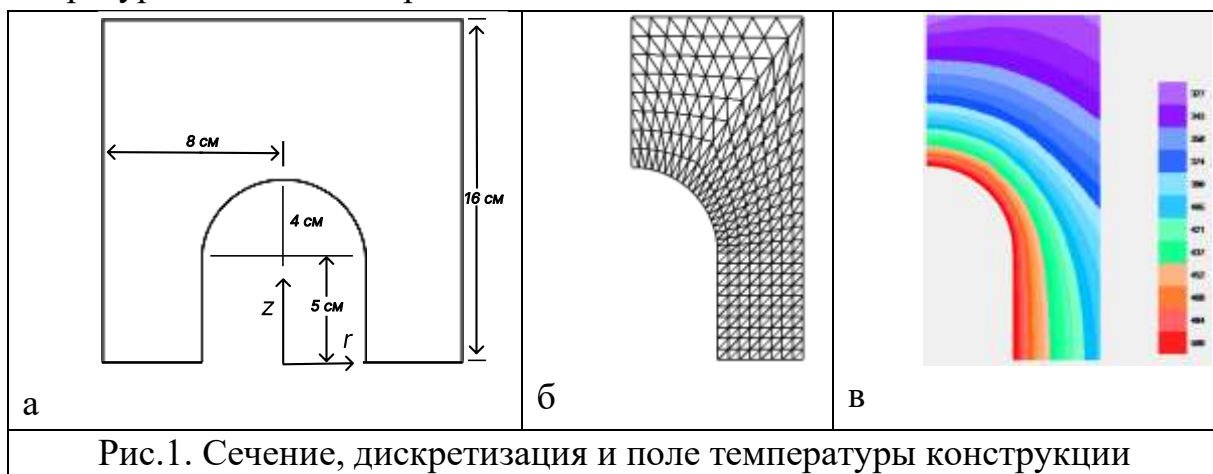


Рис.1. Сечение, дискретизация и поле температуры конструкции

Для проверки достоверности полученных результатов проведен вычислительный эксперимент, связанный с численным исследованием влияния увеличения конечных элементов на сходимости решений. В табл. 1 приведены значения количества конечных элементов и числа узлов в дискретной модели конструкции. В табл.2 приведены значения температуры в контрольных точках, анализ результатов эксперимента подтверждает сходимость значений температуры по мере размельчения сетки конечных элементов. На рис. 1.б приведена сетка конечных элементов (вариант 5) и визуализация температурного поля (рис. 1.в). Тепловой поток под действием разности значений температуры перемещается от внутренней к внешней поверхности конструкции,

Табл.1. Число конечных элементов и узлов

Варианты					
конечных элементов		6	44	88	80
число узлов	0	0	5	75	79

Табл.2. Значения температуры

Варианты	координата (8, 5)	%	координата (8, 16)	%
1	405.17	3.20	307.89	1.61
2	392.19		312.95	
3	387.44	1.21	315.79	0.89
		0.23		0.24
4	386.51	0.085	316.54	0.14

ВЫВОДЫ

Разработана численная модель решения осесимметрической задачи переноса тепла в трехмерных телах методом конечных элементов, разработан алгоритм решения и программное обеспечение. На основе вычислительного эксперимента показана численная сходимость решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.– М.: Мир, 1979. - 392 с.
2. Бородулин Р.Ю. Метод преобразования матриц для решения двумерных электродинамических задач излучения узловым методом конечных элементов// Информатика, телекоммуникации и управление, 2016, 1 (236). С. 23 – 30.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. - М: Едиториал УРСС, 2003. - 784 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. - 452 с.
5. Аптуков В.Н., Ландик Л.В., Скачков А.П. Технологии использования современных пакетов прикладных программ при решении задач механики сплошных сред// Федеральное агентство по образованию ГОУВПО «Пермский государственный университет», 2007. 38-41 с.
6. Жуков Н. П., Майникова Н. Ф., Никулин С. С., Антонов О. А. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов: -Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. - 80 с.
7. Икрамов А.М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. Компьютерное моделирование двумерных стационарных задач теплопроводности с учетом точечных источников тепла МКЭ//Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2021, 3 (33). С. 44 – 53.
8. Ikramov A.M., Polatov A.M., Pulatov S., Zhumaniyozov S. Computer Simulation of Two-Dimensional Nonstationary Problems of Heat Conduction for Composite Materials Using the FEM//AIP Conference Proceedings, 2022, 2637 (040006)