DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.11109129

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ К СКВАЖИНЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

[1] Полатов А.М., [1] ГУО Вей, [2] Одилов Ж.К.,
[1]Национальный Университет Узбекистана,
[2]Каршинский государственный университет,
asad3@yandex.ru,
709333319@qq.com,
odilovjahongir1993@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В статье на основе метода конечных элементов разработана численная модель и приводится алгоритм определения пьезометрического давления в каждой потенциальной линии течения подземных вод. Известно, что многие прикладные задачи, связанные с переносом тепла, позволяют исследовать течение воды к скважине в пористой среде, что является важной задачи гидродинамики. Разработан вычислительный алгоритм и программное обеспечение для решения задачи о радиальном течения воды в скважине, а также проанализированы результаты расчета. Исследовано влияние коэффициента фильтрации и расход воды в скважине, приведены численные результате понижение уровня воды в скважине.

Ключевые слова: *гидродинамика, подземных воды, скважина, пьезометрический напор, коэффициент фильтрации, МКЭ.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд важных физических двумерных и трехмерных задач может быть решен с использованием одномерных и двумерных конечных элементов. Радиальный поток тепла через концентрические цилиндры при различных коэффициентах теплопроводности представляется одним из классических задач. Известно, что в длинном цилиндре тепла распространяется в обоих, радиальном и осевом направлениях. Поток тепла не зависит от азимутального угла θ, если граничные условия не зависят от θ. Другая задача с осевой симметрией это - о плоском течении воды к центру скважине. В этом случае характеристики течения не зависят от утла θ. Многие трехмерные задачи теории поля обладают осевой симметрией.

В работе [1] отмечается, что подземная гидромеханика является наукой о фильтрации жидкостей, газов и их смесей в пористых породах. Предметом исследований которой является поток жидкости в поровой среде. Она является одной из составляющих теории разработки нефтяных и газовых месторождений и технологии нефтегазодобычи.. В монографии [2] приводится основные соотношения метода конечных элементов, для решения осесимметрических задач теории поля, которые при безвихревом течении воды, можно использовать при решении задач о плоском течении воды к скважине. В статье [3] рассмотрена математическая модель охлаждения полого цилиндрического шприца из металлической заготовки продольными квазистационарными потоками воды. Приведен алгоритм численного решения задачи, а также результаты расчета параметров теплопередачи цилиндров и потоков среды.

Целью статьи [4] является анализ радиального потока между резервуаром подземных вод и его добывающей скважиной, следствием которого является появление кривой депрессии (конуса депрессии) на потенциометрической поверхности, вызванной насосной скважиной. Построено математическое выражение расхода гидравлического заряда (конуса депрессии на потенциометрической поверхности) из пласта в скважину. Построена кривая депрессии на потенциометрической поверхности. Целью статьи [5] является анализ радиального течения между водоносным пластом и его добывающей скважиной, следствием которого является появление кривой депрессии (конуса депрессии) на потенциометрической поверхности, обусловленной насосной скважиной. уровни в его окрестностях понижены. Через определенное время добычи при постоянном расходе конус депрессии не развивается. В этом случае достигается постоянный режим движения подземных вод, который не изменяется. В статье [6] разработана математическая модель одномерного радиального течения через добывающую скважину, пробуренную в напорном водоносном горизонте, в случае установившегося режима течения. Получено аналитическое решение для оценки депрессий в зависимости от различных расходов. Оценивается статическое давление, рассчитывается гидравлический заряд, обусловленный потоком воды через скважину, строятся кривые депрессии и анализируются полученные кривые.

В статья [7] посвящена исследованию скорости комплексного потенциала и давления жидкости геотермального пласта добывающих и обратных нагнетательных скважин. Используя числа Бернулли определяется скорость комплексного потенциала геотермального резервуара как сумма сходящегося ряда и вычисляется давление геотермальной жидкости в скважинах. В статье [8] изучается пространственное распределения температуры вдоль ствола при закачке воды в нагнетательную скважину с целью объяснения регистрации пикообразных аномалий температуры в интервале нарушения герметичности насосно-компрессорных труб или обсадной колонны.

В данной статье на основе метода конечных элементов разработан вычислительный алгоритм и программное обеспечение для решения задач, связанных с процессом расчета пьезометрического давления в потенциальных линиях течения подземных вод, а также проанализированы результаты расчета.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается дифференциальное уравнение для квазистатических задач теории поля в цилиндрических координатах [1, 2]:

$$K_{rr}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}K_{rr}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{K_{\theta\theta}}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+K_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+Q=0 \quad , \qquad (1)$$

с граничными условиями:$\varphi=\varphi_\infty$

и

$$K_{rr}\frac{\partial\varphi}{\partial r}l_r+K_{\theta\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}l_\theta+K_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z+q+h(\varphi-\varphi_\infty)=0. \qquad (2)$$

Наличие симметрии означает, что пьезометрический напор не зависит от θ и соответствующие члены в приведенных соотношениях должны быть отброшены.

Дифференциальное уравнение двумерной задачи теплопроводности:

$$K_{rr}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}K_{rr}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+Q=0, \qquad (3)$$

где

K_{rr} - коэффициенты фильтрации [$м^3/(сут*м^2)$];

φ– пьезометрический напор, измеренный в метрах от нижней границы водоносного слоя;

Q– потери воды [$м^3/сут$].

Выкачивание воды соответстует отрицательной величине Q, с граничными условиями:

$$\varphi=\varphi_\infty,\ K_{rr}\frac{\partial\varphi}{\partial r}l_r+q+h(\varphi-\varphi_\infty)=0. \qquad (4)$$

Слагаемое q, в формуле (4), представляет поток воды, движущейся из области через границу. Единицей измерения этого количества просочившейся воды является $[м^3/сут]$.

Вариационная формулировка, соответствующая уравнению (3) и граничным условиям, связана с функционалом:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}\left[rK_{rr}(\frac{\partial\varphi}{\partial r})^2 - 2rQ\varphi\right]dV + \int_{S_1} q\varphi dS + \int_{S_2} \frac{h}{2}[\varphi^2 - 2\varphi\varphi_\infty + \varphi_\infty^2]dS. \quad (5)$$

где

S_1- область, где задан поток; S_2- область, где теплообмен.

3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Условие экстремума функционала (5) для конечного элемента eприводит к следующей системе дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\{\Phi\}} = [k^{(e)}]\{\Phi\} + \{f^{(e)}\}, \quad (6)$$

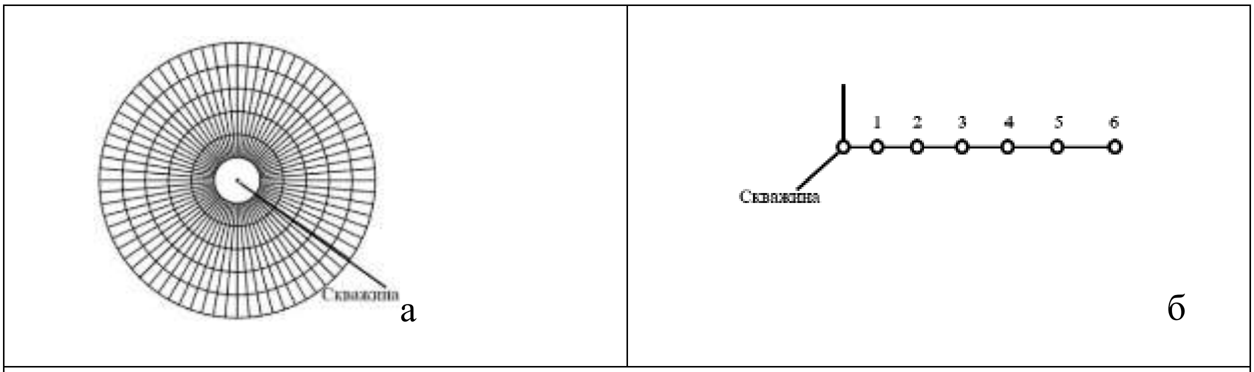
где

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}}[B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]dV + \int_{S_2} h[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]dS, \quad (7)$$

$$[f^{(e)}] = -\int_{V^{(e)}}(rQ)[N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1} q[N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2} h\varphi_\infty[N^{(e)}]^T dS, \quad (8)$$

$\mathrm{e} = 1,2,\dots,n$, где n - число конечных элементов;
$V^{(e)}$ - объем конечного элемента;
$[N^{(e)}]$ - матрица функций формы;
$[B^{(e)}]$ - матрица производных от функции формы;
$[D^{(e)}]$ - матрица коэффициентов фильтрации.

Разбнение области на элементы в данном случае показано на фиг.1.б. Каждый элемент ограничивается концентрическими окружностями. Значение φ внутри каждого элемента не зависит от угла θ, и множество концентрических окружностей может быть заменено линейными элементами, изображенными на фиг.1.а.



Фиг. 1. Множество концентрических окружностей и одномерные элементы

Функции формы для одномерного элемента, выраженные через радиус r, имеют вид:

$$N_i = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} \quad \text{и} \quad N_j = \frac{r - R_i}{R_j - R_i}. \qquad (9)$$

Переменная φаппроксимируется зависимостью:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j. \qquad (10)$$

Матрица градиентов выражается следующим соотношением:

$$[B] = \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r}\right] = \frac{1}{R_j - R_i}[-1 \quad 1]. \qquad (11)$$

Вычислить интегралы в (6) сравнительно просто. Бесконечно малое изменение объема dV элемента единичной толщины равно:

$$dV = 2\pi r dr. \qquad (12)$$

Внешнюю поверхность могут иметь только два элемента: элемент на внешней границе и внутренний элемент при наличии полости. В обоих случаях эти поверхности совпадают с узлами и интеграл по поверхности сводится к интегралу $\int dS$. Рассмотрим теперь более детально интегралы по элементам, опуская верхний индекс (e) у всех переменных, кроме $[k^{(e)}]$ и $\{f^{(e)}\}$. Вычислим объемный интеграл в $[k^{(e)}]$, используя формулы (11) и (12):

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = \frac{2\pi K_{rr}}{L^2} \int_{R_i}^{R_j} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] r^3 dr \qquad (13)$$

где K_{rr}- предполагается постоянным, а $L = R_j - R_i$ - длина элемента. После умножения и интегрирования будем иметь:

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = \frac{2\pi K_{rr}(R_j^3 - R_i^3)}{3(R_j - R_i)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Поверхностный интеграл в $[k^{(e)}]$ имеет вид:

$$\int_S h[N]^T[N]dS = \int_S h\begin{bmatrix} N_iN_i & N_jN_i \\ N_iN_j & N_jN_j \end{bmatrix} dS. \qquad (15)$$

Вычислим этот интеграл по внешней поверхности, которая совпадает с j-м узлом наиболее удаленного от центра элемента. В этом узле функции формы имеют значения: $N_j = 1$ и $N_i = 0$, поверхностный интеграл записывается следующим образом:

$$\int_S h[N]^T[N]dS = 2\pi R_j h\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Толщина элемента предполагается единичной. Дли внутренней поверхности того же элемента тот же самый интеграл имеет вид:

$$\int_S h[N]^T[N]dS = 2\pi R_i h\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Поверхностные интегралы формулы (6) для $\{f^{(e)}\}$ определяются аналогично.

Вычисление объемного интеграла, входящего в$\{f^{(e)}\}$ сводится к интегрированию членов, включающих r^2 и r^3. Запишем окончательный результат:

$$\int_V rQ[N]^T dV = \frac{\pi Q}{6(R_j-R_i)}\begin{Bmatrix} (R_j^4 - 4R_i^3R_j + 3R_i^4) \\ (3R_j^4 - 4R_j^3R_i + R_i^4) \end{Bmatrix} . \qquad (18)$$

Величина Q теперь не распределяется, как раньше, поровну между узлами, хотя это не столь очевидно из (18). Более половины величины Q приходится на узел j, потому что радиальная координата возрастает в направлении этого узла. Неравномерное распределение Q по узлам элемента иллюстрируется на следующей задаче.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБСУЖДЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве тестового примера рассматривается следующая задача [2]. В неограниченном водоносном слое с коэффициентом проницаемости $20м^3/(сут{*}м^2)$ имеется скважина (фиг.1.а). Расход воды составляет 200м^3/ч. Течение к скважине происходит в радиальном направлении, причем пьезометрический напор на расстоянии 300м от скважины поддерживается равным $30м$. Требуется определить максимальное понижение уровня воды при установившемся режиме течения.

В табл.1 приведены значения понижение уровня воды в скважине, которые сравниваются с результатами, приведенными в монографии [1]. Полученные результаты подтверждают правильность разработанного вычислительного алгоритма.

Табл.1. Понижение уровня воды в скважине

Число элементов	Давление в скважине $[м]$	Понижение уровня воды в скважине $[м]$
4	29.84	0.16
5	29.68	0.32
6	29.35	0.65
[2]	29.39	0.61

Визуализация численных значений в концентрических окружностей приведено на рис.2.

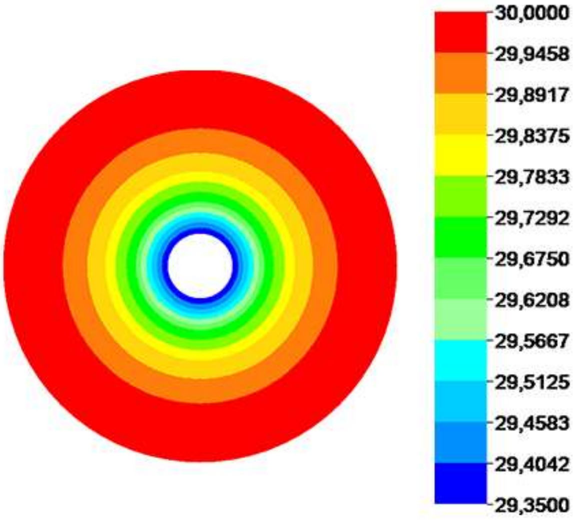


Рис.2. Визуализация численных значений в концентрических окружностей

С целью исследования влияния коэффициента фильтрации и расход воды в скважине в табл.2 и 3, приведены численные значения понижение уровня воды в скважине.

Табл.2 Понижение уровня воды в скважине

Коэффициенты фильтрации$(м^3/(сут*м^2))$	h
10	1.30
20	0.65
30	0.43
40	0.32

Табл.3 Расход воды

Расход воды $(м^3/сут)$	h
100	0.32
200	0.65
300	0.98
400	1.30

Посредством вычислительного эксперимента установлено:

- при постоянном расходе воды равном $200м^3/сут$, увеличение коэффициента фильтрации приводит к понижению уровня воды в скважине (табл.2).

- при постоянном значении коэффициента фильтрации равном $20м^3/(сут*м^2)$, увеличение расхода воды влечёт за собой к повышению уровня воды в скважине (табл.3).

Заключение

Таким образом, компьютерное моделирование процесса расчета пьезометрического давления в потенциальных линиях течения подземных вод, позволяет провести вычислительный эксперимент и определить приемлемые параметры расхода воды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарева И.Н., Мордвинов В.А. Подземная гидромеханика: Пермь, Перм. гос. техн. ун-т, 2009. - 103с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392 с.
3. Липанов А.М., Макаров С.С. Численное решение задачи охлаждения высокотемпературного сплошного металлического цилиндра. Машиностроение и инженерное образование, 2012, № 4. с. 33-40.
4. Polatov A.M., Ikramov A.M., Jumaniyozov S.P., Sapaev Sh.O. Computer simulation of two-dimensional unsteady-state heat conduction problems for inhomogeneous bodies by the FEM. Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technology (MPAMIT 2021). AIP Conference Proceedings 2781, 020019 (2023); https://doi.org/10.1063/5.0144813 Published by AIP Publishing.
5. B. Hountondji and F. de Paule Codo. Analysis of the radial flow from a ground water reservoir To its Production Well, In Steady-State Flow Conditions, In Monzoungoudo, Benin. // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 11(13): 68-76, 2017.
6. de P. Codo, F., Hountondji, B. and Aina, M.P. (2019) Steady-State Radial Flow Modeling through the Production Well in the Confined Aquifer of Monzoungoudo, Benin. Open Journal of Fluid Dynamics, 9, 107-118. https://doi.org/10.4236/ojfd.2019.92008
7. Codo, F.P., V. Adanhounmè and A. Adomou., 2012.Analytical approach for the determination of complex potential and pressure in the production and reinjection wells of geothermal reservoir. Journal of Applied Sciences Research, 8(1): 261-266.
8. Назаров В.Ф., Мухутдинов В.К. Изучение радиального градиента температуры в потоке закачиваемой воды в нагнетательной скважине. Евразийский Союз Ученых (ЕСУ), 1 (22), 2016: 82-85.