DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.10897104

MATEMATIK TA'LIMDA TRIGONOMETRIK TENGLAMALARNI YECHISHDA KOMPLEKS ANALIZDAN FOYDALANGAN HOLDA YONDASHUVI

Xasanov Gafurjan Aknazarovich
Sh.Rashidov nomidagi SamDU, f.m.-f.n.dotsent
khasanov@samdu.uz

Alikulov Yusuf Pardayevich
Sh.Rashidov nomidagi SamDU akademik litseyi,matematika
fani o'qituvchisi,
yusufaliqulov64@gmail.com

Maxmudov Inomjon Nemadullayevich
Sh.Rashidov nomidagi SamDU akademik litseyi,
matematika fani o'qituvchisi

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada kompleks sonning trigonometrik shaklidan foydalanib ba'zi trigonometrik tenglamalarni yechishning yana bir usulini ko'rib chiqamiz.

Kalit so'zlar *– trigonometrik tenglamalar, kompleks son, kompleks analiz, funksiya.*

Qadimgi yunon matematiklari ham to'g'ri burchakli uchburchaklarni yechishda trigonometriya elementlaridan foydalangan holda, eng oddiy trigonometrik tenglamalarni tuzgan va yechganlar.

Tarixiy jihatdan trigonometrik tenglamalarni yechish haqidagi ta'limot trigonometrik funksiyalar nazariyasining rivojlanishi bilan shakllangan. Trigonometrik tenglamalarni yechishning umumiy usulini aniqlab bo'lmaydi, ularning deyarli har biri (eng oddiylaridan tashqari) alohida yondashuvni talab qiladi. Ammo, bu shunisi bilan qiziqarli.

Albert Eynshteyn shunday degan edi: "Men vaqtimni siyosat va tenglamalar o'rtasida taqsimlashim kerak. Biroq, mening fikrimcha, tenglamalar muhimroqdir. Siyosat faqat bir lahza uchun, tenglamalar esa abadiy mavjud bo'ladi.

Quyida ba'zi trigonometrik tenglamalarni yechishning yana bir usulini ko'rib chiqasiz.

Ushbu trigonometrik tenglamani qaraylik,

$$acosx + bsinx = c \qquad (1)$$

bunda a, b, c lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Faraz qilaylik, $a^2 + b^2 \geq c^2$ bo'lsin. Bu tegnlamani ikkala tomonini $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ga ko'paytiramiz natijada

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} sinx = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki,

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

bo'lgani uchun quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi φ burchak mavjud;

$$sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Buni inobatga olsak, (1) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi,

$$sin\varphi\ cosx + cos\varphi\ sinx = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Qo'shish formulasidan esa

$$sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, farazimizga ko'ra, $c^2 \leq a^2 + b^2$ bo'lgani uchun, (2) tenglamani yechib berilgan (1) tenglamani qanoatlantiruvchi yechimlarini topishimiz mumkin.

Endi xuddi shu yuqoridagi tenglamani yechishning yana bitta usulini ko'rsatamiz. Boshqacha aytganda kompleks sonlar nazariyasidagi Eyler formulasi yordamida (1) tenglamani yechishning boshqa usulini keltiramiz.

Ushbu tenglikga Eyler formulasi deyishadi:

$$e^{ix} = cosx + isinx.$$

Bu tenglikdagi x o‘rniga $-x$ qo‘ysak $e^{-ix} = cosx - isinx$ hosil bo‘ladi. Bu ikki tenglikldan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz.

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{3}$$

Bularni (1) qo‘yib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$a\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + b\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = c$$

Bu tenglikni ikkala tomonini e^{ix} ga ko‘paytirsak,

$$\frac{a}{2}\left[\left(e^{ix}\right)^2 + 1\right] - \frac{ib}{2}\left[\left(e^{ix}\right)^2 - 1\right] = ce^{ix}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi $e^{ix} = y$ almashtirish olib soddalashtirsak quyidagi kvadrat tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{a - ib}{2}y^2 - cy + \frac{a + ib}{2} = 0$$

$$D = c^2 - 4 \cdot \frac{a + ib}{2} \cdot \frac{a - ib}{2} = c^2 - (a^2 + b^2)$$

Yuqoridagi farazimizga kora qilaylik, $D = c^2 - (a^2 + b^2) \leq 0$ bo‘lgani uchun

$$\sqrt{c^2 - (a^2 + b^2)} = i\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

deb olsak, hosil qilingan kvadrat tenglamaning yechimlari quyidagicha bo‘ladi.

$$y_{1,2} = \frac{c \pm i\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a - ib} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}\left[c \pm i\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}\right] =$$

$$= \frac{ac \mp b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} + i\frac{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Osongina ko‘rsatish mumkinki,

$$\left[\frac{ac \mp b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}\right]^2 = 1.$$

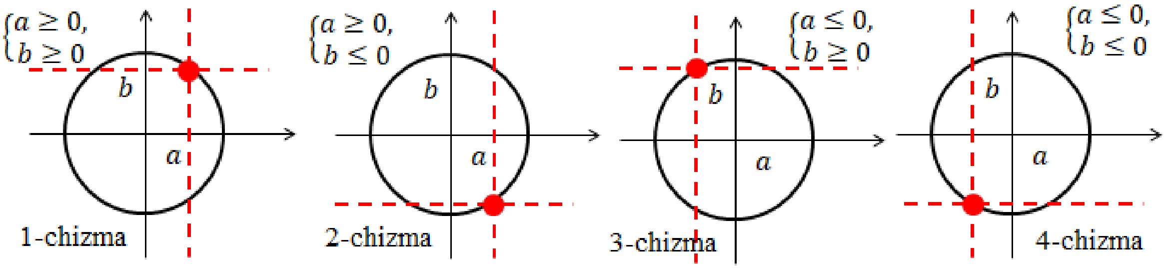
Ikkinchi tomondan almashtirishimizga ko‘ra $y = e^{ix} = cosx + isinx$ bo‘lgani uchun uning haqiqiy va mavhum qismlarini tenglashtirib, berilgan tenglamaning yechimlarini topishimiz mumkin.

$$\begin{cases} cosx = \dfrac{ac - b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \\ sinx = \dfrac{bc + a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \end{cases} \cup \begin{cases} cosx = \dfrac{ac + b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \\ sinx = \dfrac{bc - a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \end{cases} \quad (4)$$

Endi quyida oddiy trigonometrik tetenglamalar sistemasini yechish masalasini qarab chiqamiz:

$$\begin{cases} cosx = a \\ sinx = b \end{cases}$$

bu yerda a va b lar haqiqiy sonlar bo‘lib, $-1 \le a, b \le 1$ va $a^2 + b^2 = 1$ shartlarni qanoatlantiradi.



Bu chizmalardan ko‘rinib turibdiki, yuqoridagi trigonometric tenglamalar sistemasini yechimini

$$x = signb \cdot arccosa + 2k\pi, \quad k \in Z$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bundan foydalanib (4) tenglamalar sistemasini yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= sign\frac{bc + a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \cdot arccos\frac{ac - b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} + 2k\pi, \quad k \in Z, \\ x_2 &= sign\frac{bc - a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \cdot arccos\frac{ac + b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} + 2n\pi, \quad n \in Z. \end{aligned}\right. \quad (5)$$

$sign$ ishora funksiyasi va $a^2 + b^2$ har doim musbat bo‘lgani uchun, (5) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= sign\left[bc + a\sqrt{a^2+b^2-c^2}\right] \cdot arccos\frac{ac - b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} + 2k\pi, \quad k \in Z, \\ x_2 &= sign\left[bc - a\sqrt{a^2+b^2-c^2}\right] \cdot arccos\frac{ac + b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} + 2n\pi, \quad n \in Z. \end{aligned}\right. \quad (5')$$

Shunday qilib, (1) ko‘rinishda berilgan trigonometrik tenglama uchun umumiy yechimni olish mumkin ekan.

Agar $a^2+b^2=c^2$ bo‘lsa, u holda $(5')$ ni quyidagicha bo‘ladi.

$$x = signbc \cdot arccos\frac{ac}{a^2+b^2} + 2k\pi, \ \ k \in Z \qquad (5'')$$

Misol. $cosx - sinx = 1$ tenglamani barcha yechimlarini toping?

Yechilishi. Ko‘rinib turibdiki, $a=1, b=-1, c=1$ bo‘lgani uchun $\sqrt{a^2+b^2-c^2}=1$ va $a^2+b^2=2$ bo‘ladi. Bularni $(5')$ fonmulaga qoysak quyidagicha yechimlarga ega bo‘lamiz:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = sign[-1+1] \cdot arccos\frac{1+1}{2} + 2k\pi, \ \ k \in Z \\ x_2 = sign[-1-1] \cdot arccos\frac{1-1}{2} + 2n\pi, \ \ n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = sign[0] \cdot arccos1 + 2k\pi, \ \ k \in Z \\ x_2 = sign[-2] \cdot arccos0 + 2n\pi, \ \ n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2k\pi, \ \ k \in Z, \\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ \ n \in Z. \end{array}\right.$$

Xulosa qilib aytganda, kompleks sonning trigonometrik shaklidan foydalanib ba’zi trigonometrik tenglamalarni ancha ancha qulay hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *I.F.Sharigin: Fakultativniy kurs po matematike, Moskva 1989*
2. *Leybson K.L: Sbornik praktichiskix zadaniy po matematike, Moskva 2009*
3. *A.X.Shaxmestr: Uravneniya, Moskva 2011*
4. *E.D. Kulanin, i.d : 3000 konkursnix zadach po matematike, Moskva 2003*