REGULYAR SIRTLARNING PARAMETRIZATSIYASI

Umariy Muxriddin Xusniddin o‘g‘li
Oliy va amaliy matematika kafedrasi o‘qituvchisi,
Toshkent moliya instituti
E-mail: mumariy@bk.ru
ORCID: 0009-0007-7276-1254

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada uzluksiz gorizontal differensiallanuvchi haqiqiy qiymatli Karno gruppasi akslantirishlari sath sirtlari parametrlanishining regulyarligi o‘rganilgan.

“Sath sirtlarini parametrlash” usullari, Karno-Karateodori fazolarida H-regulyar gipersirtlar tushunchasi va ular uchun oshkormas funksiya haqidagi teoremaning analogi tadbiq etildi.

Kalit so‘zlar: *Sath sirtlari, Karno gruppasi, Geyzenberg gruppasi, Karno-Karateodori fazolari, regulyar gipertsirtlar*.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Умарий Мухриддин Хусниддин угли
высшая и прикладная математика преподаватель кафедры
Ташкентский финансовый институт
E-mail: mumariy@bk.ru
ORCID: 0009-0007-7276-1254

АННОТАЦИЯ

В данной статье исследуется закономерность параметризации поверхностей непрерывных горизонтально дифференцируемых вещественных отражений группы Карно.

Применялись методы «параметризации поверхностей», понятие H-регулярных гиперповерхностей в пространствах Карно-Каратеодори и аналог теоремы о нераскрытой функции для них.

Ключевые слова: *Поверхности, группа Карно, группа Гейзенберга, пространства Карно-Каратеодори, регулярные гиперповерхности.*

PARAMETRIZATION OF REGULAR SURFACES

Umariy Muxriddin Xusniddin o‘g‘li
higher and applied mathematics teacher of the department
Tashkent financial institute
E-mail: mumariy@bk.ru
ORCID: 0009-0007-7276-1254

ABSTRACT

This article examines the pattern of parameterization of surfaces of continuous horizontally differentiable real reflections of the Carnot group.

Methods of “parameterization of surfaces”, the concept of H-regular hypersurfaces in Carnot-Caratheodory spaces and an analogue of the theorem on an undisclosed function for them were used.

Keywords: *Surfaces, Carnot group, Heisenberg group, Carnot-Caratheodory spaces, regular hypersurfaces.*

KIRISH

Maqola mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi.

Sath sirtlarini parametrlash zamonaviy geometriyada eng muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi va keng o‘rganilmoqda.

So‘nggi paytlarda sath sirtlarini parametrlash, Karno-Karateodori fazosida regulyar gipersirtlarni parametrlash keng o‘rganilmoqda. Maqola ishi differensiallanuvchi funksiyalar sath sirtlari, gorizontal differensiallanuvchi funksiyalar sath sirtlari, Karno-Karateodori fazosida regulyar gipersirtlarni parametrlash, Karno gruppasida sath sirtlarini parametrlash mavzularini o‘rganishga bag‘ishlangan.

Maqola mavzusi bo‘yicha adabiyotlar sharhi (tahlili). Tadqiqotda sath sirtlarini parametrlash usullari hamda parametrlash usuli bilan berilgan gipersirt regulyar bo‘lishi uchun akslantirish tekis differensiallanuvchi bo‘lishi va har bir to‘plam ko‘paytirish va uzaytirish amallariga nisbatan yopiq, ya’ni bir jinsli qism gruppa bo‘lishi o‘rganilgan. Buning uchun [3] hamda [4] adabiyotlardan akslantirishlar va almashtirishlarga doir ta’riflar, teoremalar va ularning isbotlaridan foydalanilgan. [1] adabiyotdan esa maqola mavzusiga oid Karno-Karateodori fazosida regulyar gipersirtlarni parametrlash, Karno gruppasida sath sirtlarini parametrlash mavzulari haqida umumiy ma’lumotlar, teoremalar, ularning isbotlari, hamda ularga oid misollar keltirilgan.

Regulyar sirtlarning parametrizatsiyasi

Ushbu ishda uzluksiz gorizontal differensiallanuvchi haqiqiy qiymatli Karno gruppasi akslantirishlari sath sirtlari parametrlanishining regulyarligi o‘rganilgan.

Ta’rif [1]. Chekli o‘lchamli bog‘lanishli bir bog‘lamli Li gruppasi G Karno gruppasi deyiladi, agar chap invariantli vektor maydonlar algebrasi g tabaqalashtirilgan, ya’ni quyidagi yoyilma o‘rinli bo‘lsa:

$$g = g_1 \oplus \ldots \oplus g_m, [g_1 \quad g_i] = g_{i+1}, 1 \le i \le m-1, [g_1 \quad g_m] = \{0\}.$$

Har bir g_k da bazis vektor maydonlar $\{X_{n_{k-1}+1}, \ldots, X_{n_k}\}$ ni $n_k = \dim g_1 + \ldots + \dim g_k$, $n_0 = 0$ tengliklar bajariladigan qilib tanlaymiz. U holda G gruppaga exponensial akslantirish

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(0) \quad (1)$$

vositasida R^n fazoni mos qo‘yish mumkin, bu yerda $X_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, N$ [2].

Ta’rif [2]. Ushbu $X_j \in g_k$ bo‘ladigan k soni fomal daraja deyiladi va $\deg X_j$ kabi belgilanadi.

Quyidagi

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i X_i\right)(0), \; y = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i X_i\right)(0)$$

elementlar uchun gruppa amali Kempbell-Xausdorf formulasi yordamida aniqlanadi. Bu formula (1) munosabat uchun koordinatalarda ushbu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_{n_1} \\ x_{n_1+1} \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_{n_1} \\ y_{n_1+1} \\ \ldots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \ldots \\ x_{n_1} + y_{n_1} \\ x_{n_1+1} + y_{n_1+1} + \sigma_{n_1+1}(x, y) \\ \ldots \\ x_N + y_N + \sigma_N(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ko‘rinishni oladi, bu yerda $\sigma_k(x, y)$ – ko‘phad bo‘lib, faqat $\deg X_i < \deg X_k$ bo‘ladigan x_i va y_i o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi.

Tabaqalashtirish shartlarida (1) munosabatning koordinatalardagi ifodasidan quyidagi

$$\delta_t x = \left(tx_1, \ldots, tx_{n_1}, t^2 x_{n_2}, \ldots, t^m x_{n_{m-1}+1}, \ldots, t^m x_{n_m}\right) \quad (3)$$

qoida bo‘yicha bir parametrli uzaytirishlar gruppasi deb ataluvchi $\{\delta_t : t > 0\}$ gruppani hosil qilish mumkin.

Ta’rif [3]. Yuqoridagi (1) akslantirish yordamida G gruppada quyidagicha masofa kiritamiz:

$$d_\rho(x,y) = \left\| y^{-1} \cdot x \right\|_\rho ,$$

bu yerda $x \in R^n$ nuqtaning $\|x\|_\rho$ normasi

$$\|x\|_\rho := \max\left\{ C_k \left|(x_{n_{k-1}+1},\dots,x_{n_k})\right|^{1/k} : k = 1,\dots,m \right\}$$

kabi aniqlanadi. Agar $n_0 = 0,\ c_1 = 1$ deb olsak $c_k > 0,\ k = 2,\dots,m$ o‘zgarmaslar gruppa strukturasiga bog‘liq bo‘lib d_ρ metrika bo‘ladigan qilib tanlanadi.

Tasdiq [1]. Metrika d_ρ uchun quyidagilar o‘rinli bo‘ladi:

$$(1)\ d_\rho(x,y) \ge 0\ va\ d_\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

(2) $d_\rho(x,y) = d_\rho(y,x);$

(3) $d_\rho(z\cdot x, z\cdot y) = d_\rho(x,y);$

(4) $d_\rho(\delta_t x, \delta_t y) = t d_\rho(x,y);$

(5) $d_\rho(x,y) \le d_\rho(x,z) + d_\rho(z,y);$

(6) $d_\rho(x,y)$ akslantirish barcha $x,y,z \in G$ va $\forall t > 0$ uchun har bir argumenti bo‘yicha uzluksiz bo‘ladi.

3.2.4-ta’rif. Aytaylik d metrika tasdiq (2.6) shartlarini qanoatlantirsin. d metrikaga nisbatan markazi $x \in G$ nuqtada va radiusi $r > 0$ bo‘lgan ochiq sharni $B_d(x,r)$ kabi belgilaymiz. d metrikaga nisbatan G to‘plamda o‘lchami k bo‘lgan Xausdorf o‘lchovi deb ushbu $H_d^k(E) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} H_{d,\varepsilon}^k(E)$ miqdorga aytiladi. Bu yerda

$$H_{d,\varepsilon}^k = \inf\left\{ \sum_i r_i^k : E \subset \bigcup_i B_d(x_i, r_i), r_i < \varepsilon \right\}.$$

G gruppaning Xausdorf o‘lchami $\nu = \sum\limits_{j=1}^{N} \deg X_j = \sum\limits_{i=1}^{m} i\, n_i.$

Endi $C_H^1(\Omega)$ bilan $\Omega \subset G$ da uzluksiz haqiqiy funktsiyalar sinfini belgilaymiz, bunda Ω da ushbu

$$\nabla_H f := \left(X_1 f, \dots, X_{n_1} f \right)$$

differensial operator aniqlangan.

Ta'rif [4]. Berilgan $S \subset G$ to'plam H-regulyar gipersirt deyiladi, agar har bir $x \in S$ nuqta uchun $B(x,r)$ shar va $f \in C_H^1\left(B(x,r)\right)$ funksiya topilib, $\nabla_H f \neq 0$ va $S \cap B(x,r) = \{y \in B(x,r) : f(y) = 0\}$ bo'lsa.

H-regulyar gipersirtlar uchun oshkormas funksiya haqidagi teoremaning analogi o'rinli bo'ladi. Yevklid fazosida C^1-regulyar sirt lokal ravishda C^1-silliq funktsiyaning grafigi bo'lgani kabi, H-regulyar gipersirt ham Karno gruppasida lokal va ichki ma'noda biror funktsiyaning grafigidan iborat bo'ladi.

Endi $C_H^1(\Omega)$ bilan $\Omega \subset G$ da uzluksiz haqiqiy funktsiyalar sinfini belgilaymiz, bunda Ω da ushbu

$$\nabla_H f := \left(X_1 f, ..., X_{n_1} f\right)$$

differensial operator aniqlangan.

Ta'rif [5]. Berilgan $S \subset G$ to'plam H-regulyar gipersirt deyiladi, agar har bir $x \in S$ nuqta uchun $B(x,r)$ shar va $f \in C_H^1\left(B(x,r)\right)$ funktsiya topilib, $\nabla_H f \neq 0$ va $S \cap B(x,r) = \{y \in B(x,r) : f(y) = 0\}$ bo'lsa.

H-regulyar gipersirtlar uchun oshkormas funksiya haqidagi teoremaning analogi o'rinli bo'ladi. Yevklid fazosida C^1-regulyar sirt lokal ravishda C^1-silliq funktsiyaning grafigi bo'lgani kabi, H-regulyar gipersirt ham Karno gruppasida lokal va ichki ma'noda biror funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi.

Karno gruppasida gipertekisliklar sifatida ushbu

$$\Pi_\alpha = \left\{ x \in G : \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i x_i = 0 \right\}, |\alpha| = 1$$

ko'rinishdagi to'plamlar, ya'ni G dagi maksimal gipertekisliklar (ko o'lchami 1) qaraladi.

Teorema. Har bir Π_α to'plam ko'paytirish va uzaytirish amallariga nisbatan yopiq, ya'ni bir jinsli qism gruppa bo'ladi.

XULOSA

Ushbu maqolada biz o'rganayotgan regulyar sirtlarning parametrizatsiyasi Karno gruppalarida regulyar gipersirtlar va ularning parametrizatsiyasiga tadbiq etish mumkin. Buning natijasida bu parametrizatsiya gorizontal differensiallanuvchi $f : G \to R^1$akslantirish sath sirtini parametrlashi uchun zarur va yetarli shartlar olish mumkin, bu yerda $G = (R^n, *)$ - Karno gruppasi. Parametrizatsiya $\varphi : U \subset R^{n-1} \to R^1$ ning aniqlanish sohasida maxsus d_φ masofa va ∇^φ differensial operatorlarni kiritib, ular yordamida ∇^φ-differensiallanuvchi funksiyalarni aniqlash mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Басалаев С.Г. Параметризация поверхностей уровня вещественнозначных отображений групп Карно. Матем.труды, 2012, том 15, №2, стр. 3-29.
2. Водопьянов С.К., Грешнов А.В. О дифференцируемости отображений в геометрии пространств Карно-Каратеодори. Доклады РАН, 2003. Т.389, №5, стр. 592-596.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Москва, 1968.
4. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, 2-қисм, Тошкент, 1989.
5. Умарий Мухриддин Хусниддин ўғли. TMI-2023 “Молиявий технологиялар” илмий электрон журнали. Сатҳ сиртларини параметрлаш масалалари (Математик иқтисодий аспект)