UDK 514.76

QATLAMALI KO‘PXILLIKLAR TOPOLOGIK AKSLANTIRISHLARI GRUPPASINING XOSSALARI HAQIDA

[1] Sharipov Anvarjon Soliyevich, [2] Mamasoliyev Mirzabek Isomiddin o‘g‘li
[1]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti “Geometriya va topologiya” kafedrasi professori
[2]Namangan muhandislik-texnologiya instituti “Oliy matematika” kafedrasi assistenti
[1]E-mail: asharipov@inbox.ru, [2]G-mail: mirzabekmamasolijev@gmail.com

Annotatsiya: *Differensial geometriya va topologiyaning zamonaviy yo‘nalishlaridan biri bo‘lgan qatlamali ko‘pxilliklar nazariyasi XX asrning ikkinchi yarmida differensial tenglamalar, differensial geometriya va differensial topologiya fanlarining tutash sohasida paydo bo‘lgan. Ushbu ishda qatlamali ko‘pxilliklar topologik akslantirishlari gruppasining xossalari o‘rganilgan. Xususan, bu gruppaning kompakt ochiq topologiyaga nisbatan toplogik gruppa ekanligi isbotlangan. Bundan tashqari qatlamali ko‘pxilliklar topologik akslantirishlari to ‘plamini sanoqli bazaga ega Xausdorf fazosi ekanligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *silliq ko‘pxillik, qatlama, qatlamali ko‘pxillik, topologik akslantirish, topologik gruppa, Xausdorf fazo, kompakt ochiq topologiya, F-kompakt ochiq topologiya.*

УДК 514.76

О СВОЙСТВАХ ГРУППЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

[1] Шарипов Анваржон Солиевич, [2] Мамасолиев Мирзабек Исомиддин угли
[1]Профессор кафедры “Геометрия и топология” Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека
[2]Ассистент кафедры “Высшая математика” Наманганского инженерно-технологического института
[1]E-mail: asharipov@inbox.ru, [2]G-mail: mirzabekmamasolijev@gmail.com

Аннотация: *Теория слоеных многообразий, являющаяся одним из современных направлений дифференциальной геометрии и топологии, возникла* *во второй половине XX века на стыке таких наук, как дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии. В данной работе изучаются свойства группы топологических отображений слоеных многообразий. В частности, доказано, что эта группа является топологической группой относительно компактной открытой топологии. Кроме того, доказано, что множество топологических отображений слоеных многообразий представляет собой хаусдорфово пространство со счетной базой.*

Ключевые слова: *гладкое многообразие, слой, слоеное многообразие, топологическое отображение, топологическая группа, хаусдорфово пространство, компактная открытая топология, F-компактная открытая топология.*

UDK 514.76

ON THE PROPERTIES OF THE GROUP OF TOPOLOGICAL MAPPINGS OF FOLIATED MANIFOLDS

[1] Sharipov Anvarjon Soliyevich, [2] Mamasoliyev Mirzabek Isomiddin ugli
[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Uligbek, professor
[2]Namangan Institute of Engineering and Technology, assistant
[1]E-mail: asharipov@inbox.ru, [2]G-mail: mirzabekmamasolijev@gmail.com

Abstract: *The theory of foliated manifolds, which is one of the modern directions of differential geometry and topology, appeared in the second half of the 20th century in the related field of differential equations, differential geometry and differential topology. In this work, the properties of the group of topological maps of foliated manifolds are studied. In particular, it is proved that this group is a topological group with respect to compact open topology. In addition, it is proved that the set of topological maps of foliated manifolds is a Hausdorff space with a countable basis.*

Key words: *Smooth manifold, leaf, foliated manifold, topological map, topological group, Hausdorff space, compact open topology, F-compact open topology.*

KIRISH

Qatlamalar nazariyasi zamonaviy differensial geometriya va topologiyaning yo‘nalishlaridan bo‘lib, XX asrning ikkinchi yarmida differensial tenglamalar, differensial geometriya va differensial topologiya fanlarining tutash sohasida paydo bo‘lgan. Bu sohaning shakllanish va rivojlantirishda C. Ehresmann [1], G. Reeb [2], P. Molino [3], A. Haefliger [4], R. Langevin [5] kabi fransuz matematiklari salmoqli hissa qo‘shdilar. Qatlamalar nazariyasining asoschilaridan biri G. Reebning asosiy ilmiy ishlari qatlamalarning sifatiy nazariyasiga bag‘ishlangan. G.Reeb tomonidan, agar kompakt qatlam chekli fundamental gruppaga ega bo‘lsa, u holda bu qatlamning unga diffeomorf bo‘lgan qatlamlardan iborat atrofi mavjudligi isbotlangan [2]. C. Ehresmann ishlarida esa, to ‘la riman ko ‘pxilligidagi riman va to ‘la geodezik qatlama Ehresmann bog‘lanishiga egaligi ko‘rsatilgan [1].

So‘ngi o‘ttiz yilda O‘zbekistonda professor A.Narmanov va uning shogirdlari tomonidan qatlamali ko‘pxilliklar nazariyasi bo‘yicha salmoqli ishlar olib borilmoqda [6]-[9]. Ushbu maqolada ham shu yo‘nalishda olingan natijalar keltirilgan.

TADQIQOTLARNING TAVSIFI VA NATIJALARI

Uzluksiz akslantirishlardan biz uchun muhim akslantirishlardan biri bu topologik akslantirishdir. Topologik akslantirish gomeomorf akslantirish deb ham ataladi.

X va Y topologik fazolar, $f: X \to Y -$ akslantirish berilgan bo‘lsin.

Ta’rif 1. Agar f akslantirishga teskari akslantirish f^{-1} mavjud va f, f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo‘lsa, f topologik akslantirish deyiladi.

Topologik akslantirish ta’rifidan bevosita kelib chiqadiki, agar f topologik akslantirish bo‘lsa, unga teskari akslantirish f^{-1} ham topologik akslantirish bo‘ladi. Endi f uchun teskari akslantirish mavjud bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlarni ko‘raylik. Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga X ning har bir nuqtasini mos qo‘yadi. Demak, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun birorta $x \in X$ mavjud bo‘lib, $f(x) = y$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Buning uchun esa $f(X) = Y$ bo‘lishi, ya’ni f ustlama akslantirish bo‘lishi kerak. Bundan tashqari f^{-1} teskari akslantirish $y \in Y$ nuqta bitta $x \in X$ nuqtani mos qo‘yadigan $x_1 \neq x_2$ bo‘lganda $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo‘lishi, ya’ni o‘zaro bir qiymatli akslantirish bo‘lishi zarurdir.

Demak, f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo‘lishi uchun f ning ustlama va o‘zaro bir qiymatli akslantirish bo‘lishi zarur va yetarli. Agar X va Y topologik fazolar uchun $f: X \to Y$ topologik akslantirish mavjud bo‘lsa , X va Y topologik fazolar o‘zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deb ataladi.

Endi $0 \le k \le n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun k son qaraylik.

Tarif. Berilgan M ko‘pxilllikning chiziqli bog‘lanishli qismi to‘plamlaridan iborat oila quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

(F_1): $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_2): $\alpha \ne \beta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $\alpha, \beta \in B$ indekslar uchun $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$ munosabat o‘rinli;

(F_3): har bir $p \in M$ nuqta uchun $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^S$, $p \in U_\lambda$ shunday lokal koordinatalarni tanlash mumkin bo‘lsaki, agar biror $\alpha \in B$ uchun $U_\lambda \cap L_\alpha \ne \varnothing$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ to‘plamning chiziqli bog‘lanishli komponentalarini $\left\{\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \varphi_\lambda\left(U_\lambda\right): \quad x^{k+1} = c^{k+1}, x^{k+2} = c^{k+2}, ..., x^n = c^n\right\}$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa, M ko‘pxillikda k o‘lchamli silliq qatlama berilgan deyiladi, bu yerda $c^{k+1}, c^{k+2}, ..., c^n$ sonlar chiziqli bog‘lanishlilik komponentalarda o‘zgarmas sonlar.

Qaralayotgan L_α to‘plam F qatlamaning qatlami deyiladi. Ushbu holatda k o‘lchamli C^s qatlama koo‘lchami $q = n - k$ ga teng bo‘lgan C^s qatlama ham deyiladi. Yuqoridagi (F_1), (F_2) shartlar M ko ‘pxillik o‘zaro kesishmaydigan qatlamlardan iboratligini, (F_3) shart esa qatlamlar lokal ma’noda parallel tekisliklarga o‘xshash joylashganligini anglatadi. Agar (F_3) shart bajarilsa, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^S$ koordinatalar atroflari qatlamlangan deyiladi, barcha qatlamlangan koordinatalar atroflari to‘plami A_F^s bilan belgilanadi va qatlamlangan koordinatalar atroflari sistemasi deyiladi.

Silliq M ko ‘pxillikda F qatlama berilgan bo‘lsa, bunday ko ‘pxillik qatlamali ko ‘pxillik deyiladi va (M, F) kabi belgilanadi.

Bizga k o‘lchamli F_1, F_2 qatlamalar bilan (M, F_1) va (N, F_2) qatlamali ko‘pxilliklar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Biror $\varphi: M \to N$ topologik akslantirishda F_1 qatlamadagi ixtiyoriy L_α qatlamning $\varphi(L_\alpha)$ aksi F_2 qatlamaning qatlami bo‘lsa, berilgan (M, F_1) va (N, F_2) ko‘pxilliklar topologik ekvivalent deyiladi va $(M, F_1) \approx (N, F_2)$ kabi yoziladi. Berilgan (N, F_2) ko‘pxillikni (N, F_2) ko‘pxillikga akslantiruvchi φ akslantirish qatlamani saqlovchi deyiladi va u $\varphi:(M, F_1) \to (N, F_2)$ ko‘rinishida yoziladi.

Agar $M = N$ va $F_1 = F_2$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, qatlamali ko‘pxillikning topologik akslantirishi berilgan deyiladi.

Qatlamali (M, F) ko‘pxillikning barcha $C^r -$ topologik akslantirishlari to‘plamini $Homeo_F(M)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $r \geq 0$. $Homeo_F(M)$ to‘plam M ko‘pxillikning o‘ziga o‘zi akslantiruvchi $Homeo(M)$ diffeomorfizmlarning qism to‘plamidir. $Homeo(M)$ superpozitsiya va teskari akslantirish amallariga nisbatan gruppa hosil qiladi. Ushbu $Homeo_F(M)$ gruppa $Homeo(M)$ gruppaning qism gruppasi sifatida kompakt-ochiq topologiyada topologik gruppa bo‘ladi.

Bizga har bir F qatlamaning biror qatlamida yotadigan $\{K_\lambda\}$ barcha kompakt to‘plamlar oilasi va M ko‘pxillikda $\{U_\beta\}$ barcha ochiq to‘plamlar oilasi berilgan bo‘lsin. Har bir $K_\lambda \subset L_\alpha$ va U_β juftlik uchun $f(K_\lambda) \subset U_\beta$ munosabat o‘rinli bo‘ladigan barcha $f \in Homeo_F(M)$ akslantirishlar to‘plamini qaraylik. Bu akslantirishlar to‘plamini

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{ f : M \to M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta \}$$

kabi belgilaymiz. Ushbu $\sigma_1 = \{[K_\lambda, U_\beta]\}$ keyin $\sigma_2 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} [K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}] \right\} \cup \varnothing$ oilani qaraymiz. Bu oila ba’zi topologiyalar uchun bazani tashkil qiladi. Bu topologiyani qatlamali kompakt-ochiq yoki $F-$kompakt-ochiq topologiya deymiz.

Teorema 1. $Homeo_F(M)$ gruppa $Homeo(M)$ ning qism gruppasi bo‘ladi va u kompakt-ochiq topologiyada topologik gruppa tashkil etadi.

Teorema 2. F – kompakt-ochiq topologiya bilan $Homeo_F(M)$ to‘plam sanoqli bazaga ega bo‘lgan Xausdorf fazosi bo‘ladi.

Isbot. Bizga ma’lumki, har qanday Riman ko‘pxilligi separabel topologik fazodir. Bundan M dagi har qanday ochiq qism to‘plam uchun $U_1,\ldots U_i$ sanoqli baza mavjudligi kelib chiqadi. M lokal kompakt bo‘lgani ya’ni M dagi har qanday nuqtaning atrofini yopig‘i kompakt bo‘lgani uchun har qanday i indeks uchun $\overline{U_i}$ kompakt deb faraz qilishimiz mumkin. Endi, kompakt qaysidur L_α qatlamda yotuvchi kompakt to‘plam bo‘lsin, $U_\beta \subset M$ – ochiq to‘plam va $f(K_\lambda) \subset U_\beta$ dan f element olamiz. Har bir $p \in K_\lambda$ uchun shunday i va j indekslar topish mumkunki, f gomeomorfizm ekanidan $p \in U_i$, $f(U_i) \subset U_j \subset U_\beta$ bo‘ladi. K_λ kompakt bo‘lgani uchun kompakt to‘plam ta’rifidan $U_{i1},\ldots,U_{iN}$ to‘plamni K_λ uchun chekli qoplama va $f(K_\lambda)$ham kompakt bo‘lganidan $U_{j1},\ldots,U_{jN}$ to‘plamni $f(K_\lambda)$uchun chekli qoplama deb topishimiz mumkin. Bundan $f\left(\overline{U_i}\right) \subset U_{jk} \subset U_\beta$ $(1 \le k \le N)$ bo‘ladi. Bu yerdan quyidagi kelib chiqadi: $f \in \bigcap_{k=1}^{N} \left[\overline{U_{ik}}, U_{jk}\right] \subset \left[K_\lambda, U_\beta\right]$. Barcha $\left[\overline{U_{ik}}, U_{jk}\right]$ ko‘rinishdagi chekli kesishmalarni Ω bilan belgilasak, u $Homeo_F(M)$ da baza tashkil qiladi. Ω sanoqli ekanidan bazaning ham sanoqli ekani kelib chiqadi. Teoremaning birinchi qismi isbotlandi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash uchun bir biriga teng bo‘lmagan $f_1 \ne f_2$, $f_1 \in Homeo_F(M)$ va $f_2 \in Homeo_F(M)$ akslantirishlar olamiz. M ko‘pxillikdan shunday x nuqta olamizki uning kamida bitta bir biridan faqrli bo‘lgan f_1 va f_2 obrazlai mavjud, boshqacha qilib aytganda , $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$ deb belgilasak $x_1 \ne x_2$ ekani kelib chiqadi. M ko‘pxillik Xausdorf fazosi bo‘lgani uchun $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ nuqtalarning o‘zaro kesishmaydigan U_1 va U_2 atroflari mavjud bo‘lib, ular mos ravishda x_1 va x_2 nuqtalarni o‘z ichiga oladi. $K_\lambda = \{x\}$ deb olamiz. $F-$kompakt-ochiq topologiya ta’rifidan $W(K_\lambda, U_1), W(K_\lambda, U_2)$ ochiq va kesishmaydigan elementi mavjud: $W(K_\lambda, U_1) \cap W(K_\lambda, U_2) = \varnothing$. Agar ular kesishadi deb faraz qilsak $W(K_\lambda, U_1) \cap W(K_\lambda, U_2) \neq \varnothing$ u holda shunday $f \in Homeo_F(M)$ topiladiki $f \in W(K_\lambda, U_1) \cap W(K_\lambda, U_2)$. Shuning uchun $f(K_\lambda) \subset U_1$, $f(K_\lambda) \subset U_2$ ekanidan quyidagi holatga kelamiz $f(K_\lambda) \in U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Bu ziddiyat $Homeo_F(M)$ ni Xausdorf fazosi ekanini ko‘rsatadi.▲

XULOSA.

Ushbu maqolada qatlamali ko‘pxilliklar topologik akslantirishlari gruppasining xossalari o‘rganilgan. Xususan, bu gruppaning kompakt ochiq topologiyaga nisbatan topologik gruppa ekanligi isbotlangan. Bundan tashqari qatlamaga bog‘liq bo‘lgan, qatlama o‘lchami ko‘pxillik o‘lchami bilan bir xil bo‘lganda kompakt ochiq topologiya bilan ustma ust tushuvchi, qatlamaning koo‘lchami ko‘pxillik o‘lchami bilan teng bo‘lganda yaqinlashish nuqtaviy yaqinlashish bilan ustma-ust tushuvchi topologiyada qatlamali ko‘pxilliklar topologik akslantirishlari to‘plamini sanoqli bazaga ega Xausdorf fazosi ekanligi isbotlandi.

ADABIYOTLAR

1. C. Ehresmann, Structures feuilletees // Proc. Fifth Canad. Math. Congress. – 1961. – P.109-172.
2. G. Reeb, Sur certains proprietes topoloiques des varietes feuilletees// Actualite Sci. Indust. 1183 – Paris: Hermann, – 1952.
3. Molino P. Riemannian foliations // Progress in Mathematics Vol. 73, – Birkhäuser Boston Inc. – 1988. – P.399.
4. A. Haefliger, Varietes feuilletees // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1962. – V.16. – P.367-397.
5. R. Langevin, A list of questions about foliation. Differential topology, foliations group actions // Contemporary Math. – 1994. – V.161. – P.59-80.
6. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S. On the group of foliation isometries// Methods of functional Analysis and topology, Kiev, Ukraine, – 2009. – V.15. – P.195-200.
7. G.M.Abdishukurova and A.Ya. Narmanov Diffeomorphisms of foliated manifolds // Methods of functional Analysis and topology, Kiev, Ukraine, – 2021. – V.27(2021), no 1, pp.1-9.
8. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S. Geometry of Foliated Manifolds// Extracta mathematicae vol. **31.** Num. 2, 2016, pp. 189-197.
9. A. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of orbits of killing vector fields, Differential Equations 50 (2014), 1582–1589.