XITOY QOLDIQLAR TEOREMASI VA UNING MASALALARDA QO‘LLANILISHI

Maxmudov Farrux,
O‘zMU Matematika fakulteti talabasi, xalqaro olimpiadalar g‘olibi.
farrukh.uzbekistan@gmail.com

Norboyev Jahongir,
O‘zMU Matematika fakulteti talabasi, xalqaro olimpiadalar g‘olibi.
jakhongir_math@mail.ru

ANNOTATSIYA

Ushbu maqola orqali sodda ammo juda ko‘p Xalqaro olimpiada masalarini yechishda qo‘llaniladigan Xitoy Qoldiqlar teoremasi haqida ma’lumotlarga ega bo‘lasiz. Mavzuga doir masalalar va ularning yechimlari batafsil tushuntirilgan. Mustaqil yechish uchun yetarlicha masalalar berilgan.

Kalit so‘zlar: *tub son, o‘zaro tub son, natural son, koordinatalar tekisligi, to‘plam.*

ABSTRACT

Through this article, you will get information about the Chinese Remainder Theorem, which is simple but used in solving many International Olympiad problems. Issues related to the topic and their solutions are explained in detail. Sufficient problems are given for independent solution.

Key words: *prime number, reciprocal prime number, natural number, coordinate plane, set.*

АННОТАЦИЯ

В этой статье вы получите информацию о китайской теореме об остатках, которая проста, но используется при решении многих задач международных олимпиад. Подробно освещены вопросы, связанные с темой, и пути их решения. Приведено достаточное количество задач для самостоятельного решения.

Ключевые слова: *простое число, парные простые числа, натуральное число, координатная плоскость, множество.*

Dastlab Xitoy qoldiqlar teoremasini keltiramiz:

1-Teorema *(Xitoy Qoldiqlar Teoremasi [1]).* $m_1, m_2, \dots, m_n$ juft-jufti bilan o‘zaro tub va 1 dan farqli natural sonlar bo‘lsin. U holda har biri 0 dan farqli ixtiyoriy $a_1, a_2, \dots, a_n$ butun sonlar uchun

$$\begin{gathered} x \equiv a_1 (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 (mod\ m_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv a_n (mod\ m_n) \end{gathered}$$

Taqqoslamalar sistemasini qanoatlantiruvchi x natural son mavjud. Taqqoslamalar sistemasining har qanday ikkita yechimini $m = m_1 m_2 \dots m_n$ ga bo‘lganda bir xil qoldiq qoladi.

Isboti: Avvalo shartga ko‘ra $EKUB\left(m_i, \frac{m}{m_i}\right) = 1$, $i = 1,2, \dots, n$ o‘rinli.

Bezu lemmasiga ko‘ra $\exists b_i \in N, i = 1,2, \dots, n$ bunda

$$\frac{m}{m_i} b_i \equiv 1 (mod\ m_i),\ \ i = 1,2, \dots, n.$$

Demak,

$$\frac{m}{m_i} b_i a_i \equiv a_i (mod\ m_i),\ \ i = 1,2, \dots, n.$$

U holda $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{m_i} b_i a_i$ sonini qaraylik. Bu son uchun

$$x_0 \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{m_i} b_i a_i\ (mod\ m_i) \equiv \frac{m}{m_i} b_i a_i (mod\ m_i) \equiv a_i (mod\ m_i), \qquad i = 1, \dots, n$$

Bo‘ladi. Ya’ni x_0 soni teorema shartini qanoatlantiradi.

Aytaylik x_1 soni ham taqqoslamalar sistemasinining yechimi bo‘lsin. U holda

$x_1 \equiv x_0 (mod\ m_i) \Rightarrow x_1 - x_0 \equiv 0 (mod\ m_i) \Rightarrow x - x_0 \vdots\ m = m_1 m_2 \dots m_n$.

Teorema isbotlandi. ■

Shuni aytish kerakki *Xitoy Qoldiqlar Teoremasi* nafaqat mavjudlik haqida balki berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi sonni topish yo‘lini ham ifodalaydi.

1-Masala. $x$sonini 3 ga, 4 ga va 5 ga bo‘lganda mos ravishda 2,1 va 3 qoldiqlar qolsa, x ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan eng kichik qiymati toping.

Yechim. Masalani yechish uchun bevosita teoremani isbotidan foydalanamiz. Demak $m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ va

$$\frac{60}{3} b_1 \equiv 1\ (mod\ 3)$$

$$\frac{60}{4} b_2 \equiv 1 (mod\ 4)$$

$$\frac{60}{5}b_3 \equiv 1(mod\ 5)$$

Taqqoslamalarga ko‘ra

$$2b_1 \equiv 1(mod\ 3)$$
$$3b_2 \equiv 1(mod\ 4)$$
$$2b_3 \equiv 1(mod\ 5)$$

bo‘ladi. Agar yuqoridagi taqqoslamani qanoatlantiruvchi yechimlar sifatida $b_1 = 2$, $b_2 = 3$ va $b_3 = 3$ sonlarni olsak,

$$x_0 = 20 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 1 \cdot 3 + 12 \cdot 3 \cdot 3 = 233$$

ni hosil qilamiz. Shuningdek $233 \equiv 53\ (mod\ 60)$ bo‘lganligi uchun x ning eng kichik qiymati 53 ga teng bo‘ladi. ■

Bir qarashda Kombinatorikaga oidday tuyiladigan quyidagi masalani qaraylik.

2-Masala. Koordinatalar tekisligida (x, y) nuqta uchun $EKUB(x, y) = 1$ bo‘lsa, bu nuqta ko‘rinadigan nuqta, aks holda ko‘rinmas nuqta deyiladi.Isbotlang Shunday 100×100 o‘lchamli kvadrat mavjudki bu kvadrat o‘z ichiga oladigan barcha butun koordinatali (kvadratning tomanida va ichida yotadigan) nuqtalar ko‘rinmas bo‘lsin.

Isboti: Aytaylik 100×100 kvadratning quyi chap uchining koordinatasi (a, b) bo‘lsin. U holda kvadrat o‘z ichiga olgan barcha nuqtalarning koordinatasi

$$(x, y) = (a + m, b + n), \qquad 0 \le m, n \le 99$$

Kabi aniqlanadi. Demak kvadratning mavjudligi berilgan shartni qanoatlantiruvchi (a, b) koordinatali nuqtaning topilishiga ekvivalent.

Aytaylik $p_i - i$ chi eng kichik tub son bo‘lsin. Ya’ni $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ va hokazo.

Agar

$$a \equiv 0 \left(mod \prod_{i=1}^{100} p_i \right)$$

va

$$\begin{cases} b \equiv 0(mod\ p_1) \\ b + 1 \equiv 0(mod\ p_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b + 99 \equiv 0(mod\ p_{100}) \end{cases}$$

bo‘lsa, u holda $EKUB(a, b + n) \neq 1,\ n = 0,1,2 \dots, 99$ bo‘ladi.

Shuningdek

$$a + 1 \equiv 0 \left(mod \prod_{i=101}^{200} p_i \right)$$

va

$$\begin{cases} b \equiv 0(mod\ p_{101}) \\ b+1 \equiv 0(mod\ p_{102}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b+99 \equiv 0(mod\ p_{200}) \end{cases}$$

bo‘lsa, u holda $EKUB(a+1, b+n) \neq 1,\ n = 0,1,2 \dots, 99$ bo‘ladi.
Umuman olganda

$$\begin{cases} a \equiv 0\left(mod \prod_{i=1}^{100} p_i\right) \\ a+1 \equiv 0\left(mod \prod_{i=101}^{200} p_i\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a+99 \equiv 0\left(mod \prod_{i=9901}^{10000} p_i\right) \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} b \equiv 0\left(mod \prod_{i=0}^{99} p_{100i+1}\right) \\ b+1 \equiv 0\left(mod \prod_{i=0}^{99} p_{100i+2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b+99 \equiv 0\left(mod \prod_{i=0}^{99} p_{100i+100}\right) \end{cases}$$

Bo‘lsa u holda ixtiyoriy $0 \leq m, n \leq 99$ uchun EKUB$(a+m, b+n) \neq 1$ bo‘ladi.
Bu shartni qanoatlantiruvchi a va b natural sonlar *Xitoy Qoldiqlar Teoremas*iga ko‘ra topiladi.
Demak yuqoridagi yechimdan shuni xulosa qilish mumkinki, tekislikda masala shartini qanoatlantiruvchi nafaqat 100×100 balki $\forall n \in N$ uchun $n \times n$ kvadrat ham topilar ekan. ■

3-Masala *(USAMO 2008)***.** Ixtiyoriy n natural son berilgan bo‘lsin. Isbotlang juft-jufti bilan o‘zaro tub bo‘lgan va 1 dan farqli $k_0, k_1, \dots, k_n$ natural sonlar mavjudki, bunda $k_0 k_1 \dots k_n - 1$ sonini ketma-ket kelgan ikkita matural son ko‘paytmasi ko‘rinishida tasvirlab bo‘ladi.

Isbot: $\forall n \in N$ soni uchun $t(t+1)+1 = k_0 k_1 \dots k_n$ ni qanoatlantiruvchi $k_0, k_1, \dots k_n$ va t natural sonlari topilishini ko‘rsatish kerak.

Demak $\forall n \in N$ uchun $\exists t \in N$ bunda $P(t) = t^2 + t + 1$ning kamida $n + 1$ ta tub bo‘luvchisi borligini isbotlash yetarli. Chunki agar $P(t) = t^2 + t + 1$ ning tub bo‘luvchilari soni $n + 1$tadan kam bo‘lmasauni bir biri bilan o‘zaro tub bo‘lgan $n + 1$ ta son ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘ladi.

$$A = \{p | p \in P \ va \ \exists t \in N, \quad P(t) \vdots p\}$$

to‘plamni qaraylik.

Faraz qilaylik A to‘plamning elementlari chekli bo‘lsin. U holda

$$b = \prod_{p \in A} p$$

soni va $\forall p \in A$ uchun $EKUB(P(b), p) = 1$ bo‘adi. Ya’ni $P(b)$ sonini A to‘plamga tegishli bo‘lmagan kamida bitta tub bo‘luvchisi bor. Ziddiyat.

Demak $|A| = \infty$. A to‘plamga tegishli $n + 1$ta $p_0, p_1, \dots, p_n$ tub sonlarni qaraylik va bunda $P(t_i) \vdots p_i$, $i = 0,1, \dots, n$ bo‘lsin. U holda *Xitoy Qoldiqlar Teoremasi* ga ko‘ra

$$t \equiv t_0 (mod\ p_0)$$
$$t \equiv t_1 (mod\ p_1)$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$t \equiv t_n (mod\ p_n)$$

Taqqoslamalar sistemasini qanoatlantiruvchi t natural son mavjud. Demak bu t soni uchun

$$t \equiv t_i (mod\ p_i) \Rightarrow P(t) \equiv P(t_i)(mod\ p_i) \equiv 0(mod\ p_i),\ i = 0,1, \dots, n.$$

Ya’ni $P(t) = t^2 + t + 1$ soning kamida $n + 1$ ta tub bo‘luvchisi mavjud.

Isbot tugadi. ■

Mustaqil yechish uchun masalalar

4-Masala (MATH PRIZE OLYMPIAD). Ixtiyoriy n natural son berilgan bo‘lsin. Isbotlang a va b natural sonlar mavjudki, bunda $4a^2 + 9b^2 - 1$ soni n ga qoldiqsiz bo‘linadi.

5-Masala (IMO 1989). Isbotlang, ixtiyoriy n natural son uchun n ta ketma-ket kelgan natural sonlar mavjud,bunda bu sonlarning hech biri tub sonning darajasiga teng emas.

6-Masala (IMO 2009/1). n natural son berilgan. Agar $a_1, a_2, \dots, a_k$ (bu yerda $k \geq 2$) sonlari $\{1,2, \dots, n\}$ to‘plamdan olingan turli sonlar bo‘lib,$i = 1,2, \dots, k - 1$ uchun $a_i(a_{i+1} - 1) \vdots n$ bo‘lsa, $a_k(a_1 - 1)$ soni n ga bo‘linmasligini isbotlang.

7-Masala (APMO 2009/4). Isbotlang ixtiyoriy k natural son uchun, arifmetik progressiya tashkil qiluvchi

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$$

ratsional sonlar mavjud. Bunda $EKUB(a_i, b_i) = 1,\ i = 1,2,..,k$ va $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ sonlarining barchasi turli xil.

8-Masala. (ELMO SHORTLIST 2014). Barcha (a, b, c) natural sonlar uchliklarini toping, bunda 2014 kichik barcha tub sonlar ko‘paytmasi m bilan o‘zaro tub bo‘lgan ixtiyoriy n natural son uchun $a^n + b^n + n \vdots (n + c)$ bo‘lsin.

9-Masala. $a > b > c \geq 3$ natural sonlar berilgan bo‘lsin. Agar

$$a|bc + b + c$$
$$b|ca + c + a$$
$$c|ab + b + a$$

bo‘lsa a, b, c sonlaridan kamida bittasi murakkab son ekanligini isbotlang.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Andreescu Titu and D. Andrica. Number Theory: Structures, Examples and Problems. Boston, MA: Birkhuser, 2009.
2. Masum Billal, Amir Parvardi. Topics in Number Theory: an Olympiad-Oriented Approach 2018.
3. Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu and Oleg Mushkarov. Number Theory: Concepts and Problems. XYZ press, 2017.
4. Justin Stevens. Olympiad Number Theory Through Challenging Problems. Third Edition, 2016.