ОЦЕНКА ДЛЯ BLOW-UP И ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Матякубов А.С[1]., Раупов Д.Р.[2], Чориев Б.Б.[2]
1. Заведующий кафедры ПМиКА НУУз, д.ф.-м.н.,
2. Старший преподаватель кафедры ВМиИ Академии МЧС РУз.,
e-mail:almasa@list.ru, raupov.dilmurod@mail.ru.

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрена нелинейное параболическое уравнение недивергентного вида с граничными условиями. Используя принципы максимума Хопфа, доказаны теоремы существования неограниченных (blow-up) решений за конечное время, а также получены верхние оценки для неограниченных и глобальных решений нелинейного параболического уравнения.

Ключевые слова: нелинейную параболических уравнений, Blow-up свойства решения, глобальных решений.

BLOW-UP SOLUTIONS AND GLOBAL SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS NON-DIVERGENCE FORM WITH BOUNDARY CONDITIONS

ABSTRACT

The paper considers a non-divergence nonlinear parabolic equation with robin boundary conditions. using Hopf's maximum principles, theorems on the existence of unbounded (blow-up) solutions in finite time are proved, and upper bounds are obtained for unbounded and global solutions of a nonlinear parabolic equation.

Key words: nonlinear parabolic systems equations, Blow-up properties of solutions, Global solutions.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассмотрим Blow-up свойства и глобального решения следующей задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(u)\nabla\left(a(u)\nabla u\right) + f(u), \qquad (x,t)\in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,t)u = 0, \qquad (x,t)\in \partial D\times(0,T) \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x\in \overline{D}$$

где D - гладкая ограниченная область в R^N, $N \geq 2$, $\overline{D}$ - ее замыкание ∇ - градиентный символ, $\frac{\partial}{\partial n}$ - направленный производная во внешнем нормальном направлении.

Всюду в этой работе мы предполагаем, что функция a, b, f является положительная $C^2\left(R^+\right)$, функция σ - неотрицательная $C^1(\overline{Q_T})$, $\left(Q_T = D\times(0,T),\, R^+ = (0,+\infty)\right)$, функция u_0 - положительная $C^3(\overline{D})$ и $\frac{\partial u_0}{\partial n} + \sigma(x,t)u_0 = 0 \;\; (x,t)\in \partial D\times(0,T)$.

В системах разной природы встречаются сверхбыстрые процессы, в которых исследуемая величина за некоторый промежуток времени возрастает на несколько порядков. Другими словами, имеет место взрывной рост исследуемой величины. В качестве примеров можно привести быстрое сжатие вещества (коллапс) в физике, вспышки инфекционных заболеваний в эпидемиологии, некоторые процессы в химической кинетике и т.д. Математически такие явления могут быть описаны с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих решения, растущие в режиме с обострением. Это решения, которые в конечный момент времени (момент обострения) обращаются в бесконечность на некотором множестве точек пространства. Их также называют неограниченными или взрывными (blow-up solutions в англоязычной литературе).

К настоящему времени разработанные методы научными школами А.А.Самарского, С.П.Курдюмова, M.Wang, M.Winkler и М.М.Арипова, изучающая приближённо - автомодельные решения, подтвержденная экспериментами и адекватным математическим моделированием регулярно изучаются, в настоящее время отсутствует достаточно обоснованных теорий для blow-up режимов различных нелинейных математических моделей.

ЛИТЕРАТУРА И МЕТОДОЛОГИЯ

Blow-up свойства решения для параболических уравнений изучаются большим числом авторов, так как показанном в [1-16].

Juntang Sing и Shengjia Li [1] рассмотрели следующую проблему:

$$u_t = \nabla\big(a(u)g(x)\nabla u\big)u + g(x,t)f(u),\ (x,t)\in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,t)u = 0,\ \ (x,t)\in D\times(0,T) \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0,\ x\in\overline{D}$$

где D - гладкая ограниченная выпуклая область в R^N, $N \geq 2, 0 < T < +\infty$. $\overline{D}$ - ее замыкание, a, b, f, g, σ является положительная функция, функция σ - неотрицательная $C^1(\overline{Q_T})$, $\left(Q_T = D\times(0,T),\ R^+ = (0,+\infty)\right)$, функция u_0 - положительная $C^3(\overline{D})$.

Фридман и Маклеод [2] рассмотрели следующую проблему:

$$u_t = \Delta u + f(u),\ (x,t)\in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,t)u = 0,\ \ (x,t)\in D\times(0,T) \qquad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0,\ x\in\overline{D}$$

где D - гладкая ограниченная выпуклая область в R^N, $N \geq 2, 0 < T < +\infty$. Они обсудили (3), но они не исследовали оценки времени взрыва решение, которое получено в этой статье. Следовательно, наши результаты в настоящей работе расширяют и дополняют полученные в [1].

Немаловажное место в теории нелинейных уравнений занимает исследование неограниченных решений, или по-другому, режимов с обострением (blow-up). Нелинейные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально неразрешимыми по времени: решение неограниченно возрастает в течение конечного промежутка времени.

Определение. Решения, удовлетворяющие условию

$$\max_{x\in\Omega} u(t,x) \to +\infty,$$

при $t \to T_0^-$ называются режимами с обострением (или неограниченными), где Ω - ограниченная область в R^N, T_0 - время существования решения.

Допустим T максимальное время существование решении $u(x,t)$ которое может быть конечное или бесконечное. Если $T<\infty$, тогда u неограниченна в конечном времени и допускается режим с обострением. Если $T=\infty$, мы говорим решение глобальное.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $u(x,t)$ -решение $(u \in C^3(D\times(0,T)) \cap C^2(\overline{D}\times(0,T))$ задачи (1). Предположим, что выполняется следующие условия:

1) При $s \in R^+$,

$$0<a(s)\le\beta,\ b(s)>0,\ a'(s)\ge 0,\ f(s)>0,\ af''(s)-a'f'(s)\ge 0,\ \left(\frac{sa(s)}{f(s)}\right)'\le 0$$

2) В $D\times(0,T)$ $\sigma(x,t)\ge 0, \sigma_t(x,t)\le 0$

3) $$\beta=\min_{\overline{D}}\left\{\frac{a(u_0)}{f(u_0)}\left[b(u)\nabla\left(a(u_0)\nabla u_0\right)+f(u_0)\right]\right\}>0, \tag{4}$$

4) $$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds<+\infty \tag{5}$$

где $M_0=\max_{\overline{D}} u_0$.

Тогда $u(x,t)$ решение (blow-up) существует за конечное время T и

$$T\le\frac{1}{\beta}\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds \tag{6}$$

также как $u(x,t)\le H^{-1}(\beta(T-t))$

где $H(z)=\int_z^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds,\ z>0$ и H^{-1} - обратная функция H.

Доказательство. Рассмотрим функцию,

$$G=-a(u)u_t+\beta f(u) \tag{7}$$

из которого мы находим

$$\nabla G=-a'(u)u_t\nabla u-a\nabla u_t+\beta f'\nabla u,$$

$$\Delta G = -a'(u)u_t\Delta u - a''(u)u_t|\nabla u|^2 - 2a'(u)\nabla u\nabla u_t - a\Delta u_t + \beta f'\Delta u + \beta f''|\nabla u|^2 \qquad (8)$$

а также

$$G_t = -a'(u_t)^2 - a(u_t)_t + \beta f'u_t = -a'(u_t)^2 - a\left(b(u)\left(a'(u)|\nabla u|^2 + a\Delta u\right) + f(u)\right)_t +$$
$$+\beta f'u_t = -a'(u_t)^2 - a(b'a'|\nabla u|^2 + b'a\Delta u + ba''u_t(u)|\nabla u|^2 + 2ba'(u)\nabla u\nabla u_t +$$
$$+b\,a'u_t\Delta u + ba\Delta u_t + f'u_t) + \beta f'u_t = -a'(u_t)^2 - ab'a'|\nabla u|^2 - ab'a\Delta u - \qquad (9)$$
$$-aba''u_t(u)|\nabla u|^2 - 2aba'(u)\nabla u\nabla u_t - ab\,a'u_t\Delta u - aba\Delta u_t - af'u_t + \beta f'u_t$$

В силу (8) и (9) следует, что

$$ab\Delta G - G_t = \beta abf'\Delta u + \beta abf''|\nabla u|^2 + a'(u_t)^2 + aa'b'|\nabla u|^2 + a^2b'\Delta u +$$
$$+af'u_t - \beta f'u_t \qquad (10)$$

В силу (1) имеем $\beta ab\,f'\Delta u = \beta f'u_t - \beta f'a'b|\nabla u|^2 - \beta ff'$ (11)

Из (10) и (11) следует, что

$$ab\Delta G - G_t = \beta f'u_t - \beta a'b|\nabla u|^2 + \beta abf''|\nabla u|^2 + a'(u_t)^2 +$$
$$+aa'b'|\nabla u|^2 + a^2b'\Delta u + af'u_t - \beta f'u_t - \beta ff' \qquad (12)$$

В силу (7) имеем

$$-af'u_t = -f'G + \beta ff' \qquad (13)$$

Комбинируя (11) и (12), следует, что

$$ab\Delta G + f'G - G_t = \beta a^2\left(\frac{f'\cdot b}{a}\right)'|\nabla u|^2 + a'(u_t)^2 - \beta f'ab'|\nabla u|^2 +$$
$$+aa'b'|\nabla u|^2 + a^2b'\Delta u + \beta ff' - \beta ff' \qquad (14)$$

$$a^2b'\Delta u = \frac{ab'}{b}u_t - ab'a'|\nabla u|^2 - \frac{ab'}{b}f$$

$$ab\Delta G + \left(f' + \frac{b'}{b}\right)G - G_t = \beta a^2\left(\frac{f'\cdot b}{a}\right)'|\nabla u|^2 + a'(u_t)^2 -$$
$$-\beta f'ab'|\nabla u|^2 - \frac{ab'}{b}f + \beta\frac{b'}{b}f \qquad (15)$$

Из условия теорему гарантируют, что правая часть в равенстве (15) неотрицательна,

$$ab\Delta G + \left(f' + \frac{b'}{b}\right)G - G_t \geq 0 \qquad (16)$$

Из (4) следует, что

$$\max_{\overline{D}} G(x,0)=\max_{\overline{D}}\left\{-a(u_0)(b(u_0)\nabla\left(a(u_0)\nabla u_0\right)+f(u_0))+\beta f(u_0)\right\}=0 \qquad (17)$$

В области $(x,t)\in\partial D\times(0,T)$ имеем

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-a'u_t\frac{\partial u}{\partial n}-a\frac{\partial u_t}{\partial n}+\beta f'\frac{\partial u}{\partial n}=a'\sigma u u_t-a\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_t-\beta f'\sigma u=$$

$$=a'\sigma u u_t+a(\sigma u)_t-\beta f'\sigma u=\sigma(a'u+a)u_t+a\sigma_t u-\beta f'\sigma u=$$

$$=\sigma(a'u+a)\left(-\frac{G}{a}+\frac{\beta f}{a}\right)+a\sigma_t u-\beta f'\sigma u=$$

$$=-\frac{\sigma}{a}(a'u+a)G+a\sigma_t u+\frac{\beta f^2\sigma}{a}\frac{d}{du}\left(\frac{a(u)u}{f(u)}\right)$$

Объединяя (16) - (17) и принципы максимума Хопфа, следует, что G не может максимум на $\partial D\times(0,T)$, а в $\overline{D}\times(0,T)$ максимум G равен 0. Следовательно, мы имеем в $\overline{D}\times(0,T)$ $G\le 0$, а также

$$\frac{a(u)}{f(u)}u_t\ge\beta \qquad (18)$$

В точке x_0, где $u_0(x_0)=M_0$, получаем интегрирование

$$\frac{1}{\beta}\int_{M_0}^{u(x_0,t)}\frac{a(s)}{f(s)}ds\ge t$$

Используя предположение (5), следует, что $u(x,t)$ решение существует за конечное время T. Более того, должно выполняться неравенство,

$$T\le\frac{1}{\beta}\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{f(s)}ds$$

Интегрируя неравенство (18) по $[t,s]$ $(0<t<s<T)$, для каждого фиксированного x получается

$$H(u(x,t))\ge H(u(x,t)-H(u(x,s))=\int_{u(x,t)}^{u(x,s)}\frac{a(s)}{f(s)}ds=$$

$$=\int_t^s\frac{a(u)}{f(u)}u_t dt\ge\beta(s-t)$$

так что

$$u(x,t) \le H^{-1}(\beta(s-t))$$

Следовательно, полагая $s \to T$, имеем

$$u(x,t) \le H^{-1}(\beta(T-t))$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Теорема 2. Пусть $u(x,t)$ - решение $(\mathrm{u} \in C^3(\mathrm{D}\times(0,\mathrm{T})) \cap C^2(\overline{D}\times(0,\mathrm{T}))$ задачи (1.1). Предположим, что выполняется следующие условия:

1) При $s \in R^+$,

$$0 < \beta \le a(\mathrm{s}), b(\mathrm{s}) > 0, a'(\mathrm{s}) \le 0, f(s) > 0, af''(s) - a' f'(s) \le 0, \left(\frac{sa(s)}{f(s)}\right)' \ge 0$$

2) В $\mathrm{D}\times(0,\ \mathrm{T})$ $\sigma(\mathrm{x},t) \ge 0, \sigma_t(\mathrm{x},t) \ge 0$

3) $$\delta = \max_{\overline{D}} \left\{ \frac{a(u_0)}{f(u_0)} \left[b(u_0)\nabla\left(a(u_0)\nabla u_0\right) + f(u_0) \right] \right\} > 0$$

4) $$\int_{m_0}^{+\infty} \frac{a(s)}{f(s)} ds < +\infty \qquad (19)$$

где $m_0 = \min\limits_{\overline{D}} \mathrm{u}_0$.

Тогда существует $u(x,t)$ глобальным решением и

$$u(x,t) \le G^{-1}(\delta \mathrm{t} + \mathrm{G}(\mathrm{u}_0(\mathrm{x})))$$

где $G(z) = \int\limits_{m_0}^{z} \frac{a(s)}{f(s)} ds,\ \mathrm{z} > m_0$, и G^{-1} - обратная функция G.

Доказательство. Рассмотрим функцию,

$$\Psi = -a(u)u_t + \delta f(u)$$

Повторяя вывод теоремы 1 находим, что в $\mathrm{D}\times(0,\mathrm{T})$ минимум равен 0. Следовательно, мы имеем в $\overline{D}\times(0,\mathrm{T})$, $\Psi \ge 0$

а также $$\frac{a(u)}{f(u)} u_t \le \delta \qquad (20)$$

Для каждого фиксированного $x \in \overline{D}$ мы получаем интегрирование

$$\frac{1}{\delta}\int_{M_0}^{u(x_0,t)}\frac{a(s)}{f(s)}ds \le t \qquad (21)$$

Из (19) и (20) следует, что существует $u(x,t)$ глобальным решением. С неравенством (21)

$$G(u(x,t))-G(u_0(x))=\int_{u_0(x)}^{u(x,t)}\frac{a(s)}{f(s)}ds\le\delta t$$

а также $u(x,t)\le G^{-1}(\delta t+G(u_0(x)))$

Доказательство теоремы 2 завершено.

ОБСУЖДЕНИЕ

В теореме 1, если $a(u)=u^{m-1}$, $b(u)=u^{\alpha}$ и $f(u)=f^{\,p}$, то имеет место следующий вывод.

Следствие 1. Пусть $u(x,t)$ - решение $(u\in C^3(D\times(0,T))\cap C^2(\overline{D}\times(0,T))$ задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u^{\alpha}\nabla\left(u^{m-1}\nabla u\right)+u^{p} \quad (x,t)\in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x,t)u=0 \quad (x,t)\in\partial D\times(0,T)$$

$$u(x,0)=u_0(x)>0 \qquad x\in\overline{D}$$

где D - гладкая ограниченная область в R^N, $N\ge 2$. Предположим, что выполняется следующие условия:

1) $1\le m\le p$,

2) В D×(0, T) $\sigma(x,t)\ge 0,\sigma_t(x,t)\le 0$ 3)

$$\beta=\min_{\overline{D}}\left\{\frac{u_0^{m-1}}{u_0^{p}}\left[u_0^{\alpha}\nabla\left(u_0^{m-1}\nabla u_0\right)+u_0^{p}\right]\right\}>0$$

4) $\int_{M_0}^{+\infty}s^{m-p-1}ds=\frac{M_0^{m-p}}{p-m}, \quad m<p$ где $M_0=\max_{\overline{D}}u_0$.

Тогда существует $u(x,t)$ решение(blow-up) за конечное время T и $T \le \frac{1}{\beta}\frac{M_o^{m-p}}{p-m}$

так же как $u(x,t) \le H^{-1}(\beta(T-t)) = \left((p-m)\beta(T-t)\right)^{\frac{1}{m-p}}$

где $H(z) = \frac{z^{m-p}}{p-m}, z > 0$ и H^{-1} - обратная функция H.

В теореме 2, если $a(u) = u^{m-1},\ b(u) = u^{\alpha}$ и $f(u) = f^{p}$, то имеет место следующий вывод.

Следствие 2. Пусть $u(x,t)$ - решение $(u \in C^3(D\times(0,T)) \cap C^2(\overline{D}\times(0,T))$ задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^{\alpha}\nabla\left(u^{m-1}\nabla u\right) + u^{p} \quad (x,t) \in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,t)u = 0 \quad (x,t) \in \partial D\times(0,T)$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0 \qquad x \in \overline{D}$$

где D - гладкая ограниченная область в R^N, $N \ge 2$. Предположим, что выполняется следующие условия:

1) $0 \le p \le m \le 1$

2) В D×(0, T) $\sigma(x,t) \ge 0, \sigma_t(x,t) \ge 0$

3) $\delta = \max\limits_{\overline{D}}\left\{\frac{u_0^{m-1}}{u_0^{p}}\left[u_0^{\alpha}\nabla\left(u_0^{m-1}\nabla u_0\right) + u_0^{p}\right]\right\} > 0$

4) $\int\limits_{m_0}^{+\infty} s^{m-p-1}ds = \lim\limits_{k\to+\infty}\left[\frac{k^{m-p}}{m-p} - \frac{m_0^{m-p}}{m-p}\right], \qquad m > p$

где $m_0 = \min\limits_{\overline{D}} u_0$.

Тогда существует $u(x,t)$ глобальным решением и

$$u(x,t) \le G^{-1}(\delta t + G(u_0(x))) = \left((m-p)\left(\delta t + \frac{u_0^{m-p}}{m-p} - \frac{m_0^{m-p}}{m-p} \right) + m_0^{m-p} \right)^{\frac{1}{m-p}} =$$

$$= \left((m-p)\delta t + u_0^{m-p} \right)^{\frac{1}{m-p}}$$

где $G(z) = \int\limits_{m_0}^{z} s^{m-p-1} ds = \frac{z^{m-p}}{m-p} - \frac{m_0^{m-p}}{m-p}$, *при* $m > p$, и G^{-1} - обратная функция G.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье была рассмотрена задача (1) и получены нелинейных параболических уравнений существования и неограниченных (blow-up) решений за конечное время, а также показаны верхние оценки blow-up и глобальных решений. Blow-up и глобальных свойства решения даются при подходящих предположениях по a, b, f и начальным данным $u_0(x)$ полученные результаты применяются к некоторым примерам, в которых a, b, f и σ являются степенными функциями или экспоненциальные функции.

Пример 1. Пусть $u(x,t)$ - решение $(u \in C^3(D \times (0,T)) \cap C^2(\overline{D} \times (0,T))$ задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \nabla \left(u^2 \nabla u \right) + u^4 \quad (x,t) \in D \times (0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + e^{-t\sum_{i=1}^{3} x_i^4} u = 0 \quad (x,t) \in \partial D \times (0,T)$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \overline{D}$$

где , $D = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \,|\, 1 < \sum_{i=1}^{3} x_i^2 < 2 \right\}$.

Теперь мы имеем $f = u^4, \sigma(x,t) = e^{-t\sum_{k=1}^{3} x_k^4}, u_0(x) = \sum_{k=1}^{3} x_k^2$

$$\beta = \min_{\overline{D}} \left\{ \frac{u_0^2}{u_0^4} \left[u_0^2 \nabla \left(u_0^2 \nabla u_0 \right) + u_0^4 \right] \right\} = \min_{\overline{D}} \left\{ \left[\frac{u_0^2}{u_0^2} \nabla \left(u_0^2 \nabla u_0 \right) + u_0^2 \right] \right\} =$$

$$=\min_{\overline{D}}\left\{\left[u_0^2\left(\frac{2u_0\cdot 4\cdot\sum_{k=1}^{3}x_k^2+6u_0^2}{u_0^2}\right)+u_0^2\right]\right\}=\min_{\overline{D}}\left\{\left[u_0^2\left(\frac{8u_0^2+6u_0^2}{u_0^2}\right)+u_0^2\right]\right\}=$$

$$=\min_{1\le s\le 2}\left\{\left[14s^2+s^2\right]\right\}=15.$$

Из следствия 1 следует, что $u(x,t)$ решение существует за конечное время

Т и $T\le\frac{1}{\beta}\frac{M_o^{m-p}}{p-m}=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$

также как $u(x,t)\le H^{-1}(\beta(\mathrm{T}-\mathrm{t}))=\left(\left(4-3\right)\cdot 15\left(T-t\right)\right)^{-1}=\frac{1}{15\left(T-t\right)}$

Пример 2. Пусть $u(x,t)$ - решение $(u\in C^3(\mathrm{D}\times(0,\mathrm{T}))\cap C^2(\overline{D}\times(0,\mathrm{T}))$ задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u^2\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\nabla u\right)+\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\qquad (x,t)\in D\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+e^{t\sum_{i=1}^{3}x_i^4}u=0\quad (x,t)\in\partial D\times(0,T)$$

$$u(x,0)=u_0(x)>0,\quad x\in\overline{D}$$

где , $D=\left\{x=(x_1,x_2,x_3)\,|\,1<\sum_{i=1}^{3}x_i^2<2\right\}$.

Теперь мы имеем $f=\frac{1}{\sqrt[3]{u}},\sigma(x,\mathrm{t})=\mathrm{e}^{t\sum_{k=1}^{3}x_k^4},\ u_0(x)=\sum_{k=1}^{3}x_k^2$

$$\delta=\max_{\overline{D}}\left\{\frac{u_0^{-1/2}}{u_0^{1/3}}\left[u_0^2\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{u_0}}\nabla u_0\right)+u_0^{1/3}\right]\right\}=\max_{\overline{D}}\left\{\left[\frac{u_0^2}{\sqrt{u_0}\cdot\sqrt[3]{u_0}}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{u_0}}\nabla u_0\right)+\frac{1}{\sqrt{u_0}}\right]\right\}=$$

$$= \max_{\overline{D}} \left\{ \left[u_0^2 \left(-\frac{4 \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^2}{2u_0^2 \cdot \sqrt[3]{u_0}} + \frac{6}{u_0 \cdot \sqrt[3]{u_0}} \right) + \frac{1}{\sqrt{u_0}} \right] \right\} = \max_{\overline{D}} \left\{ \left[u_0^2 \left(\frac{4}{u_0 \cdot \sqrt[3]{u_0}} \right) + \frac{1}{\sqrt{u_0}} \right] \right\} =$$

$$= \max_{1 \le s \le 2} \left\{ \left[s^2 \left(\frac{4}{s \cdot \sqrt[3]{s}} \right) + \frac{1}{\sqrt{s}} \right] \right\} = 17$$

Из следствия 2 следует, что $u(x,t)$ глобальным решением и

$$u(x,t) \le \left(\frac{17}{6} t + \sqrt[6]{u_0} \right)^{1/6}.$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Juntang Ding and Shenjia Li (2005). Blow-up Solutions and Global Solutions for a Class of Quasilinear Parabolic Equations with Robin Boundary Conditions.*Computers and Mathematics with Applications 49, 689-701.*

2. A. Friedman and B. Mcleod (1985) Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, *Indiana Univ.Math. J.* 34, 425-447.

3. M.H. Protter and H.F.Weinberger (1967). *Maximum Principles in Differential Equations,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J.

4. J.M. Chadam, A. Peirce and H.M. Yin (1992). Two blow-up property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions, *J. Math. Anal. Appl.* 169 (2), 313-328.

5. Yu.V. Egorov and V.A. Kondratiev (1988). Two theorems on blow-up solutions for semilinear parabolic equations of second order, *Partial Differential Equations* 327 (1), 47-52.

6. H.M. Yin (1994). Blow-up versus global solvability for a class of nonlinear parabolic equations, *Nonlinear Anal. TMA* 23 (7), 911-924.

7. Aripov M., Rakhmonov Z. (2016). On the behavior of the solution of a nonlinear multidimensional polytropic filtration problem with a variable coefficient and nonlocal boundary condition. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics, Vol. 4, № 1, 23-32.*

8. Aripov M., Matyakubov A.S.(2016). To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 3 Issue 8,* p. 533–537.

9.Арипов М., Матякубов А.С.(2016). Эффект конечной скорости распространения возмущения для модели кросс-диффузионных систем недивергентного вида. *Вестник НУУз, №2,* с. 94-102.
10. Wang M., Wei Y. Blow-up properties for a degenerate parabolic system with nonlinear localized sources. *J. Math. Anal. Appl. 2008*. 343. 621–635.
11. Duan Z., Zhou L.(2000) Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems with Crosswise-Diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 244, 263-278.*
12. Lu H.(2009) Global existence and blow-up analysis for some degenerate and quasilinear parabolic systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 49*. 1–14.
13. Deng W., Li Y., Xie Ch.(2003). Global existence and nonexistence for a class of degenerate parabolic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 55, Issue 3,* P. 233–244.
14.H. Amann (1986). Quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions, *Arch. Rational Mech. Anal.*92 (2), 153-192.
15. Jianjun Li, Wenjie Gao.(2012). Global existence and nonexistence for some degenerate and strongly coupled quasilinear parabolic systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 387*(1):1–7.
16. Yuzhu Han, Wenjie Gao. (2010). A degenerate and strongly coupled quasilinear parabolic system with crosswise diffusion for a mutualistic model. *Nonlinear Analysis Real World Applications 11(5):*3421-3430.