BIR JINSLI BO‘LMAGAN ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASINI FURYE (O‘ZGARUVCHILARNI AJIRATISH) USULI YORDAMIDA YECHISH

Rustamov Maxammadi Jabborovich
O‘zMu Jizzax filiali “Amaliy matematika”
fakulteti dotsenti f.m.f.n.
mrustamov@jbnuu.uz

Irgasheva Umida Abdimital kizi
O‘zMu Jizzax filiali “Amaliy matematika”
fakulteti 2-bosqich magistranti.
irgasheva_umida@jbnuu.uz

Iskandarov Azizbek Ilxom o‘g‘li
O‘zMu Jizzax filiali “Amaliy matematika”
Fakulteti 471-22 guruh talabasi

ANNOTATSIYA

Bir jinsli parobolik tipli tenglamalarni yechishning juda ko‘p usullarini ko‘rganmiz. Maqolada bir jinsli bo‘lmagan jismning ya’ni, sterjenning issiqlik manbaalari ta’siri kuzatilgan holi ko‘rib chiqilgan. Maqolada sterjenda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini Furye usuli ya’ni, o‘zgaruvchilarni ajiratish usuli yordamida yechishni analitik va sonli usullarni qo‘llash yordamida algoritmi batafsil yoritilgan.

Kalit so‘zlar: Issiqlik tarqalishi, sterjen, Shturm-Liuvill formulasi, Eyler formulasi, Furye qatori, nuqtaviy issiqlik manbai.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФУРЬЕ (РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ)

АННОТАЦИЯ

Мы видели много способов решения однородных параболических уравнений. В статье наблюдалось влияние источников тепла неоднородного тела, то есть осетра. В статье подробно описан алгоритм решения уравнения теплообмена в осетре методом Фурье, то есть методом разделения переменных, с использованием аналитических и численных методов.

Ключевые слова: Диффузия тепла, стерген, формула Штурма-Лиувилля, формула Эйлера, ряд Фурье, точечный источник тепла.

SOLUTION OF THE INHOMOGENOUS HEAT DISTRIBUTION EQUATION USING THE FOURIER (SEPARATION OF VARIABLES) METHOD

ANNOTATION

We have seen many ways to solve homogeneous parabolic equations. In the article, the effect of heat sources of a non-homogeneous body, that is, a sturgeon, was observed. The article describes in detail the algorithm for solving the equation of heat transfer in a sturgeon using the Fourier method, that is, the method of separation of variables, using analytical and numerical methods.

Key words: Heat diffusion, stergen, Sturm-Liouville formula, Eyler's formula, Furye series, point heat source.

KIRISH:

Tabiatda aksariyat hollarda voqeylik harakat bilan bog'liq bo'lsa, tabiiy voqiylikni matematik modelini tuzib uni yechishdiffernsiyal tenglamalarni yechishga keltiriladi. Ko'p xollarda issiqlik tarqalishi diffuziya to'lqin tarqalishi tor tebranishi va hokazo hollarni matemanik modeli matematik fizika tenglamalari issiqlik tarqalishi tenglamasi (parabolik) to'lqin tarqalishi tenglamasi (elliptik), tor tebranishi tenglamasi (gipirbolik) kabi tenglamalar qatnashgan masalalarni yechishga keltiriladi.

Biz bu maqolada chekli uzunlikdagi sterjenda qo'yilgan aralash masalalarning limitik holi sifatida aniqlangan chegaralanmagan uzunlikdagi sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasining yechimi xuddi giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda qo'llanilgan o'zgaruvchilarni almashtirishyoki Furye usuli yordamida topilib, yechim Puasson integrali deb ataluvchi integral shaklida tasvirlanishini o'rgandik.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Klassik olimlar: Krasovskiy, Tahonov.A.A Samariskiy, Butkavskiy.A.G' Marguk … va hokazo olimlar shu masalalar bilan shug'ullanuvchilar bo'lishgan.

Texnologik yechimlar effettuvligi ko'p hollarda issiqlik almashinuvi holatini aniq va chuqur o'rganishga bog'liq. Bundan tashqari ko'proq ekspremental izlanishlar axamiyat berilmoqda. Izlanishlar shuni ko'rsatadiki yuqoridagilarga asos bo'lib issiqlik tarqalishi teskari masalasini yechish hizmat qiladi va aksariyat hollarda yechish usuli natijani olishni yagona usuli bo'ladi teskari masalalarni yechish usuli nochiziqli nostatsionar qiyin bo'lgan issiqlik almashinish protsesslarini o'rganishga imkoniyat beradi. Bu usulda axborotlar ko'lami keng bo'lib voqeylikka imkon qadar yaqin eksperimental izlanishlarga imkon beradi.

Bir jinsli parobolik tipli tenglamalarni Furye (o‘zgaruvchilarni ajiratish) usuli yordamida yechish usulidan foydalanib issiqlik tarqalishning bir jinsli bo‘lmagan ya’ni, sterjenda issiqlik manbaalari ta’siri kuzatilgan holini ko‘rib chiqamiz:

$U_t = a^2 U_{xx}+f(x,t)$, 0<x<l, t>0 (1)

tenglamani va

U(x,0)=0, 0<x<l (2)

boshlang‘ich hamda

U(0,t)=0, U(l,t)=0, t $\geq$ 0 (3)

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtaga xos bir jinsli bo‘lmagan tenglama yechimi topilsin (aynan nolmas).

Bu masala yechimini

U(x,t)=T(t)X(x) (4)

ko‘rinishida axtaramiz. (4) ni (1) ga qo‘yamiz:

T’(t)X(x)= a^2T(t)X’’(x); (5)

(5) ifodani (4) ga bo‘lamiz.

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2\frac{X''(x)}{X(x)} \quad (6)$$

(6) ning chap va o‘ng tomonini alohida o‘zgaruvchilardan iborat bo‘lgani uchun (6) tenglik

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \text{ yoki } T'(t)+ \lambda T(t)=0, \quad (7)$$

hamda

$$a^2\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ yoki } a^2X''(x)+ \lambda X(x)=0 \quad (8)$$

larga ega bo‘ladi. Bu tengliklar λ >0 uchun o‘rinli. Shuning uchun λ ning o‘rniga λ^2 yozamiz.

Bu tenglamalarni (2)-(3)-shartlarda qarasak, oddiy differensial tenglama uchun quyidagi Shturm-Liuvill masalasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} a^2X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Navbatda (I) va (II) Shturm-Liuvill masalalarini yechamiz. Dastlab (II) ni yechamiz. (II) ning yechimi

$X(x)= e^{kx}$, (9)

bo‘lsin. Bu yerda k hozircha noma’lum son-parametr. (9) ni (II) ning 1-tenglamasiga qo‘yamiz. [2]

$$a^2k^2e^{kx} + \lambda^2e^{kx}=0$$

$$a^2k^2 + \lambda^2 = 0$$

$k^2 = -\frac{\lambda^2}{a^2}$

k= $\pm\frac{\lambda i}{a}$

Eyler formulasiga ko‘ra ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$):

$e^{\lambda i\, x}$=$A_1\cos \lambda x$ +$B_1 i\sin \lambda x$

$e^{\frac{\lambda i}{a}x}$=$A_2\cos \frac{\lambda}{a}x$ +$B_2 i\sin \frac{\lambda}{a}x$

Yuqoridagilardan

X(x)= A cos λx +B sin λx (10)

kelib chiqadi. X(0)=0 chegaraviy shartni (1) tenglamaga qo‘ysak, X(0)= A cos (λ · 0) +B sin (λ · 0)

va sin (λ · 0) $= 0$

hamda cos (λ · 0) $= 1$

ekanligidan A=0 kelib chiqadi. Bundan ko‘rinadiki

X(x)=Bsin λx (11).

X(l)=0 chegaraviy shartni (11) tenglamaga qo‘yib, X(l)=Bsin λl=0 tenglikni hosil qilamiz. B≠0 ekanligidan sin λl=0 hosil bo‘ladi. Bundan λ ni topsak:

$\lambda l = n\pi \qquad \lambda = \frac{n\pi}{l}$.

Hosil bo‘lgan λ ning qiymatini (11) tenglamaga qo‘yib,

X(x)=sin$\frac{n\pi}{l}$x (12)

ifodani hosil qilamiz.

Huddi shunday T(t)= e^{kt} almashtirish olib, T(t) funksiyani topamiz. $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ bo‘lgani uchun T(t) funksiya sonli qator ko‘rinishida hosil bo‘ladi. X(x) va T(t) funksiyalarni (1) tenglamaga olib borib qo‘ysak,

U(x,t)=$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$ (13)

va f(x,t) uchun

f(x,t)=$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$ (14)

Furye qatorlarini hosil qilamiz. (14) tenglikdan Furye koeffitsientini topamiz [3]:

$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t) \sin\frac{n\pi}{l}x$ (15)

Bu qiymatlar ((13), (14)) ni (1) ga qo‘ysak,

$\sum_{n=1}^{\infty}\{(\frac{n\pi}{l}a)^2 U_n(t) + U'_n(t) - f_n(t)\} \sin\frac{n\pi}{l}x = 0$ (16)

tenglik hosil bo‘ladi. $\sin\frac{n\pi}{l}x \neq 0$ ekanligidan,

$(\frac{n\pi}{l}a)^2 U_n(t) + U'_n(t) - f_n(t)$=0 (17)

tenglama kelib chiqadi. (17) tenglamaning yechimi oddiy differensial tenglamalar kursidan bizga ma’lum.

$(\frac{n\pi}{l}a)^2 = A,$

$U_n(t) = U,$

$U'_n(t) = U',$

$f_n(t) = f$

Belgilashlar kiritib, (17) tenglamani Bernulli usuli yordamida ishlaymiz. [4]

$U'+AU-f=0$ (18)

$U(t)=g(t)\cdot v(t)$ (19)

desak,

$U'(t)=g'(t)\cdot v(t)+v'(t)\cdot g(t)$ (20)

bo‘ladi. (19) va (20) ni (18) tenglamaga olib borib qo‘yib, g va v ni topamiz.

$g'v+v'g+Agv-f=0$

$g'v+(v'+Av)g-f=0$

$v'+Av=0$

$\frac{dv}{dt}$=-Av

$\frac{dv}{v}$=-Adt

$ln(v)=-A(t+C_1)$

$\boldsymbol{v=e^{-A(t+C_1)}}$

$g'v-f=0$

$\frac{dg}{dt}=e^{-A(t+C_1)}=f$

$dg=f\cdot e^{-A(t+C_1)}dt$

$\boldsymbol{g=\int_0^t f(t)\, e^{-A(t-\tau)}d\tau}$

NATIJALAR

v va g funksiyalarni (19) tenglamaga qo‘ysak,

$U_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-(\frac{n\pi}{l}a)^2(t-\tau)}d\tau$ (21)

(21) ni (13) ga qo‘yib, yechimni

$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\int_0^t f_n(\tau)\, e^{-(\frac{n\pi}{l}a)^2(t-\tau)}d\tau\}\sin\frac{n\pi}{l}x$ (24)

ko‘rinishda yozish mumkin. Ushbu yechimni

$f_n(t)$ ning ifodasini o‘rniga qo‘yish va qator tekis yaqinlashuvchanligiga asosan uni hadlab integrallash mumkinligidan foydalanib

$U(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\varepsilon,t-\varepsilon)f(\varepsilon,\tau)\, d\varepsilon d\tau$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda

$G(x,y,z)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\frac{n\pi}{l}a)^2 z}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\varepsilon$ (25)

Odatda ushbu G(x, y, z) funksiya nuqtaviy issiqlik manbai funksiyasi deb aytiladi.

MUHOKAMA

Turmush hayotimizda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan isssiqlikning to‘g‘ri chiziq, tekislik va fazoda tarqalish jarayoni, shuningdek diffuziya hodisasi parobolik tipli tenglamalar orqali o‘rganiladi. Bu tenglamalar uchun ham to‘lqin tenglamasi kabi chegaraviy va Koshi masalari tenglama yechimini bir qiymatli ajratib olishga imkon yaratadi va ular belgilangan rejimga asosan tanlab olinadi.

XULOSALAR

Biz bu maqolamizda chekli uzunlikdagi sterjenda qo‘yilgan aralash masalalarning limitik holi sifatida aniqlagan chegaralanmagan uzunlikdagi sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi xuddi giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalrni yechishda qo‘llanilgan o‘zgaruvchilarni almashtirish yoki Furye usuli yordamida topilib, yechim Puasson integrali deb ataluvchi integral shaklda tasvirlanishini ko‘rdik.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

[1]- Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. Наука, 1970. – 736 с.

[2]-M.S.Salohiddinov. Matematik fizika tenglamalari. Toshkent. “O‘qituvchi”-2002. 445 bet.

[3]- Рустамов М., Иргашева У. Задача восстановления скоростьизменение температурыпокосвенным наблюдениям. Scientific journal “Research and education”. (ISSN:2181-3191) May-2022. 22-29 8 стр. http://researchedu.org/index.php/rae/article/view/777/902

[4]-A.B.Hasanov. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. Darslik. 16-bet. Samarqand 2019-yil. 345 bet UDK: 517.7