НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Тожиев Илхом Ибраимович
кандидат физико-математических наук, НГГТУ,
email: adamjon-2015@umail.uz

Жумакулова Зилола Шухрат кизи
магистрант, НГГИ

Аннотация. *В этой работе устанавливаются некоторые элементарные свойства идемпотентных вероятностных мер.*

Ключевые слова: *вероятностная мера, идемпотентная вероятностная мера, полукольцо, идемпотентное полукольцо, полуполе, деквантизация Маслова.*

Annotation. *In this paper, we establish some elementary properties of idempotent probability measures.*

Keywords: *probability measure, idempotent probability measure, semiring, idempotent semiring, semifield, Maslov's dequantisation.*

Пусть S – множество, снабженное двумя алгебраическими операциями: сложением $\oplus$ и умножением $\odot$. Множество S называется полукольцом, если выполнены следующие условия:

(i) сложение $\oplus$ и умножение ассоциативны;

(ii) сложение $\oplus$ коммутативно;

(iii) умножение дистрибутивно относительно сложения $\oplus$.

Полукольцо S называется коммутативным, если умножение $\odot$ коммутативно. Единица полукольца S – это элемент $1 \in S$, такой, что $1 \odot x = x \odot 1 = x$ для всех $x \in S$. Нулем полукольца S называется элемент $0 \in S$, такой, что $0 \neq 1$ и $0 \oplus x = x$, $0 \odot x = x \odot 0 = 0$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется идемпотентным, если $x \oplus x = x$ всех $x \in S$. Полукольцо S с нулем 0 и единицей 1 называется полуполем, если всякий ненулевой элемент $x \in S$ обратим.

Пусть $(S,\oplus,\odot,0,1)$ – идемпотентное полукольцо. На S естественным образом возникает частичный порядок $\prec$: для элементов a, $b \in S$ по определению $a \prec b$ тогда и только тогда, когда $a \oplus b = b$. Таким образом, все элементы полукольца S неотрицательны: $0 \prec x$ для всех $x \in S$.

Идемпотентным аналогом числовых функций являются отображения $X \to S$, где X – произвольное множество, S – идемпотентное полукольцо. S - значные функции можно складывать, перемножать, и умножать на элементы S.

Идемпотентным аналогом линейного пространства функций является множество S^X S -значных функций, замкнутое относительно сложения функций и умножения функций на элементы S (которое является S -полумодулем). По определению функционал $f: S^X \to S$ называется идемпотентным линейным функционалом, если

$$f(\lambda_1 \odot \phi_1 \oplus \lambda_2 \odot \phi_2) = \lambda_1 \odot f(\phi_1) \oplus \lambda_2 \odot f(\phi_2)$$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in S$ и $\phi_1, \phi_2 \in S^X$. Множество всех идемпотентных линейных функционалов $f: S^X \to S$ обозначают через $B(X,S)$; это множество замкнуто относительно сложения функционалов и умножения функционалов на элементы S.

Пусть $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел и $\mathbb{R}_+$ – полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций). Замена переменных

$x \mapsto u = h \ln x$, $h > 0$, определяет отображение $\Phi_h: \mathbb{R}_+ \to S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Пусть операции сложения и умножения на S являются образами обычных операций на $\mathbb{R}$ при отображении Φ_h, т. е. $u \oplus_h v = h\, ln\left(exp\left(\frac{u}{h}\right) + exp\left(\frac{v}{h}\right)\right)$, $u \odot v = u + v$, $\mathbb{0} = -\infty = \Phi_h(0)$, $\mathbb{1} = 0 = \Phi_h(1)$. Легко видеть, что при $h \to 0$ имеем $u \oplus_h v \to max\{u, v\}$. Следовательно, множество S образует полуполе относительно операций $u \oplus v = max\{u, v\}$ и $u \odot v = u + v$, нуля $\mathbb{0} = -\infty$ и единицы $\mathbb{1} = 0$. Полученное коммутативное полуполе принято обозначать через $\mathbb{R}_{max}$. Оно идемпотентно. Изложенная конструкция восходит к работе [1] В. П. Маслова. Она называется деквантизацией Маслова.

Пусть X – компакт, $C(X)$ – алгебра непрерывных функций на X. На $C(X)$ можно определить операции $\oplus$ и $\odot$ следующим образом: $\phi \oplus \psi = max\{\phi, \psi\}$ и $\phi \odot \psi = \phi + \psi$, $\phi, \psi \in C(X)$. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ через λ_X обозначим постоянную функцию, везде на X принимающую значение λ.

Определение 1 [2; 3]. Функционал $m{:}\, C(X)$® **R**$(\subset \mathbb{R}_{max}())$ называется идемпотентной вероятностной мерой, если он обладает следующими свойствами:

(a) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (нормированность функционала μ);

(b) $\mu(\lambda \odot \phi) = \lambda \odot \mu(\phi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\phi \in C(X)$ (однородность функционала μ относительно $\odot$);

(c) $\mu(\phi \oplus \psi) = \mu(\phi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\phi, \psi \in C(X)$ (аддитивность функционала μ относительно $\oplus$).

Для компакта X множество всех идемпотентных вероятностных мер $\mu: C(X) \to \mathbb{R}$ обозначается через $I(X)$. Ясно, что $I(X) \subset \mathbb{R}^{c(x)}$. Множество $I(X)$ снабжается топологией, индуцированной топологией тихоновского произведения $\mathbb{R}^{c(x)}$. Предбазу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ образуют множества вида

$$\langle \mu; \phi_1, \ldots, \phi_n; \varepsilon \rangle = \{\nu \in I(X) \colon |\nu(\phi_i) - \mu(\phi_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

где $\mu \in I(X)$, $\phi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, n$ и $\varepsilon > 0$.

Здесь уместно привести пример идемпотентной меры. Пусть $x_1, \ldots, x_1 \in X$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{max}$ удовлетворяют условию $max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = 0$. Определим $\mu \colon C(X) \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\mu(\phi) = max\{\phi(x_i + \lambda_i) | i = 1, \ldots, n\}$. Как обычно, для каждого $x \in X$ через δ_x (или $\delta(x)$) обозначаем функционал на $C(X)$, определенный формулой $\delta_x(\phi) = \phi(x)$, $\phi \in C(X)$ (вероятностная мера Дирака, сосредоточенная в точке x). Тогда можно записать $m = \mathrm{E}_{i=1}^{n} l_i \; e \; d_{x_i}$.

Пусть μ:$C(X) \to \mathbb{R}$ – идемпотентная вероятностная мера, F – замкнутое, U – открытое подмножества X, $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим:

если $\alpha \geq 0$, то $\mu(\alpha\chi_F)$ =inf{$\mu(\phi)$:$\phi \in C(X)$, $\phi \geq \alpha\chi_F$},

если $\alpha \leq 0$, то $\mu(\alpha\chi_F)$ =sup{$\mu(\phi)$:$\phi \in C(X)$, $\phi \leq \alpha\chi_F$},

если $\alpha \geq 0$, то $\mu(\alpha\chi_U)$ =sup{$\mu(\phi)$:$\phi \in C(X)$, $\phi \leq \alpha\chi_U$},

если $\alpha \leq 0$, то $\mu(\alpha\chi_U)$ =inf{$\mu(\phi)$:$\phi \in C(X)$, $\phi \geq \alpha\chi_U$},

где χ_A – характерикческая функция множества $A \subset X$.

Легко видеть, что $\mu(c \odot \alpha\chi_A) = c \odot \mu(\alpha\chi_A)$ для любого $c \in \mathbb{R}$ и произвольного открытого или замкнутого $A \subset X$. Идемпотентную вероятностную меру μ продолжим на множество

$$C(X) \oplus \{\alpha\chi_A \colon \alpha \in \mathbb{R}\} \equiv \{\phi \oplus \alpha\chi_A \colon \phi \in C(X), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

следующим образом $\mu(\phi \oplus \alpha\chi_A) = \mu(\phi) \oplus \mu(\alpha\chi_A)$. Итак, далее, для открытых или замкнутых подмножеств A_1, … , A_n компакта X и вещественных чисел α_1, … , α_n положим

$$\tilde{\mu}\left(\phi \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\right) = \mu(\phi) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mu\left(\alpha_i \chi_{A_i}\right).$$

Таким образом μ продолжена на множество

$$\aleph(X) := C(X) \oplus \{c \odot \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} : A_i \subset X,\ c,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n,\ n \in N\} \equiv$$
$$\equiv \{\phi \oplus c \odot \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} : \phi \in C(X),\ A_i \subset X,\ c,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n,\ n \in N\}.$$

Легко заметить, что верно следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого компакта X множество $\aleph(X)$ является max-plus линейным подпространством пространства $B(X)$ ограниченных функций X.

Согласно варианту теоремы Хана-Банаха для идемпотентных линейных функционалов из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ продолжается на $B(X)$. При этом существует продолжение $\mu' : B(X) \to \mathbb{R}$, такое, что $\mu'|_{\aleph(X)} = \tilde{\mu}$.

Для открытого подмножества U компакта X, вещественного числа λ положим

$$\langle U;\varepsilon\rangle_\lambda = \{\mu \in I(X) : \mu(\lambda\chi_U) > \varepsilon\},\ \lambda > 0;$$

$$\langle U;-\varepsilon\rangle_\lambda = \{\mu \in I(X) : \mu(\lambda\chi_U) < -\varepsilon\},\ \lambda < 0.$$

Предложение 1. Для всякого открытого подмножества U компакта X, для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in (0;+\infty)$ множества $\langle U;\varepsilon\rangle_\lambda$ и $\langle U;-\varepsilon\rangle_\lambda$ открыты в $I(X)$.

Доказательство этого предложение состоит из дословного повторения аналогичного утверждения для слабо аддитивных функционалов [4].

Теорема 2. Пусть F – замкнутое подмножество компакта X, $\mu \in I(X)$. Тогда следующие условия равносильны:

(i) $\mu(\alpha\chi_F) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mu\left(\alpha\chi_{X\setminus F}\right) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\mu(\phi\chi_F) = \mu(\phi)$, $\phi \in C(X)$.

(iv) $\mu\left(\phi\chi_{X\setminus F}\right) = 0$, $\phi \in C(X)$

(v) supp $\mu \subset F$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П. Методы операторов. – М.: «Мир». 1987.

2. Заричный М.М. Пространства и отображения идемпотентных мер.// Изв. РАН. Серия математическая. Т. 74. № 3. 2010. С. 45-64.

3. Zarichniy M. Idempotent probability measures, I// arXiv:math.GN/0608754. V. 1. 30 Aug. 2006.

4. Заитов А.А. Слабо аддитивные функционалы на топологических пространствах.// Доктр. дис. ИМИТ АН РУз Ташкент. 2011. 208 стр.

5. Заитов А.А., Тожиев И.И. Функциональные представление замкнутых подмножеств компакта.// Узбекский математический журнал. Ташкент. 2010. № 1. С. 53-63.

6. Тожиев И.И. Об одной метрике пространства идемпотентных вероятностных мер.// Узбекский математический журнал. Ташкент. 2010. № 4. С. 165-172.

7. Заитов А.А., Тожиев И.И. Функтор идемпотентных вероятностных мер и равномерная метризуемость функторов.// Узбекский математический журнал. Ташкент. 2011. № 2. С. 66-74.

8. Zaitov A.A., Tojiev I.I. On a metric on the space of idempotent probability measures.// arXiv:1006.3902v2 [math.GN] 15 Mar 2012.

9. Zaitov A.A., Tojiev I.I. On uniformly metrizability of the functor of idempotent probability measures.// arXiv:1204.0074v1 [math.GN] 31 Mar 2012.

10. Тожиев , И., & Жумакулова , З. . (2023). ОБ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР. Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, 3(4), 7–14. извлечено от https://in-academy.uz/index.php/EJMTCS/article/view/11904