ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Уринбоева Дилрабо

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Аннотация. В литературе принято делить гипергеометрические функции многих переменных на полные и конфлюэнтные. В настоящее время известны 205 полные гауссовские гипергеометрические функции трех переменных, составлены системы дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют. Список конфлюэнтных форм гипергеометрических функций трех переменных включает в себя 416 функций, однако соответствующие системы дифференциальных уравнений пока не составлены. В настоящей работе излагается процесс составления для некоторых конфлюэнтных гипергеометрических функций трех переменных.

Ключевые слова: Гипергеометрическая функция Гаусса, порядок гипергеометрической функции многих переменных, полные и конфлюэнтные функции, система дифференциальных уравнений в частных производных.

Большие успехи в изучении теории гипергеометрического ряда одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для рядов от двух или многих переменных. Аппель определил в 1880 г. четыре ряда, каждый из которых аналогичен известному ряду Гаусса. Горн изучил в 1889 г. сходимость гипергеометрических рядов от двух переменных и установил систему дифференциальных уравнений в частных производных, которым они удовлетворяют. Он определил порядок гипергеометрических рядов и выделил их на полные и конфлюэнтные гипергеометрические ряды, а также он установил, что, кроме некоторых рядов, выражаемых через ряды от одного переменного или через произведения двух гипергеометрических рядов, каждый из которых зависит от одного переменного, существуют 34 (из них 14 полные и 20 конфлюэнтные) существенно различных сходящихся ряда порядка 2 [1].

В монографии [2] определены и указаны области сходимости 205 гауссовских гипергеометрических функций трех переменных, кроме того известны системы дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа, которым удовлетворяют эти полные гипергеометрические функции трех переменных. Конфлюэнтные формы гипергеометрических функций трех переменных начисляют более 400 функций. Пусть дан трехкратный ряд

$$u(x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty} A_{m,n,p}x^m y^n z^p \quad .$$

Составим следующие соотношения

$$\frac{A_{m+1,n,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{F(m,n,p)}{F'(m,n,p)},\ \frac{A_{m,n+1,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{G(m,n,p)}{G'(m,n,p)},\ \frac{A_{m,n,p+1}}{A_{m,n,p}}=\frac{H(m,n,p)}{H'(m,n,p)},$$

причем $F(m,n,p),F'(m,n,p),\ G(m,n,p),G'(m,n,p),\ H(m,n,p),H'(m,n,p)$ являются многочленами второго порядка и удовлетворяют систему линейных дифференциальных уравнений гипергеометрического типа. Эту систему можно записать с помощью дифференциальных операторов [1]

$$\begin{cases}\left[F'(\delta_x,\delta_y,\delta_z)x^{-1}-F(\delta_x,\delta_y,\delta_z)\right]u=0,\\ \left[G'(\delta_x,\delta_y,\delta_z)y^{-1}-G(\delta_x,\delta_y,\delta_z)\right]u=0,\\ \left[H'(\delta_x,\delta_y,\delta_z)z^{-1}-H(\delta_x,\delta_y,\delta_z)\right]u=0,\end{cases} \qquad (1)$$

где

$$\delta_x=x\frac{\partial}{\partial x},\ \delta_y=y\frac{\partial}{\partial y},\ \delta_z=z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Рассмотрим конфлюэнтную гипергеометрическую функцию трех переменных

$$E_{29c1}(a_1,a_2,b;c_1,c_2;x,y,z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{2m+n}(a_2)_p(b)_{n-p}}{(c_1)_m(c_2)_n\, m!n!p!}x^m y^n z^p$$

и составим соотношения

$$f(m,n,p)=\frac{A(m+1,n,p)}{A(m,n,p)}=\frac{\left(a_1+2m+n\right)\left(a_1+2m+n+1\right)}{(c_1+m)(m+1)},$$

$$g(m,n,p)=\frac{A(m,n+1,p)}{A(m,n,p)}=\frac{\left(a_1+2m+n\right)\left(b+n-p\right)}{(c_2+n)(n+1)},$$

$$h(m,n,p)=\frac{A(m,n,p+1)}{A(m,n,p)}=\frac{\left(a_2+p\right)}{(b+n-p-1)(p+1)}.$$

Следовательно,

$$F(m,n,p)=\left(a_1+2m+n\right)\left(a_1+2m+n+1\right);\quad F'(m,n,p)=(c_1+m)(m+1);$$

$$G(m,n,p)=\left(a_1+2m+n\right)\left(b+n-p\right);\quad G'(m,n,p)=(c_2+n)(n+1);$$

$$H(m,n,p)=\left(a_2+p\right);\quad H'(m,n,p)=(b+n-p-1)(p+1).$$

Раскрываем эти соотношения:

$$F(\delta,\delta')u=\left(a_1+2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_1+2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+1\right)u=$$

$$=a_1(a_1+1)u+(4a_1+6)x\frac{\partial u}{\partial x}+2(a_1+1)y\frac{\partial u}{\partial y}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\left[F'\left(\delta,\delta'\right)x^{-1}\right]u=\left(c+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{u}{x}\right)=c\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$G(\delta,\delta')u=\left(b+y\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(a_1+2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=$$

$$=a_1bu+(a_1+b+1)y\frac{\partial u}{\partial y}+2bx\frac{\partial u}{\partial x}-a_1z\frac{\partial u}{\partial z}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z};$$

$$\left[G'\left(\delta,\delta'\right)y^{-1}\right]u=\left(c_2+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(1+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{u}{y}\right)=c_2\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$H(\delta,\delta')u=\left(a_2+z\frac{\partial}{\partial z}\right)u=a_2u+z\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\left[H'\left(\delta,\delta'\right)z^{-1}\right]u=\left(b-1+y\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(1+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{u}{z}\right)=(b-1)\frac{\partial u}{\partial z}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Подставив полученные выражения в (1), получим систему, которую удовлетворяет конфлюэнтная гипергеометрическая функция $u=E_{29c1}$:

$$\begin{cases} x(1-4x)u_{xx} - y^2 u_{yy} - 4xyu_{xy} + \left[c_1 - (4a_1+6)x\right]u_x - 2(a_1+1)yu_y - a_1(a_1+1)u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - 2xyu_{xy} + 2xzu_{xz} + yzu_{yz} - 2bxu_x + \left[c_2 - (a_1+b+1)y\right]u_y - a_1 zu_z - a_1 bu = 0, \\ zu_{zz} - yu_{yz} + (1-b+z)u_z + a_2 u = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим еще функцию трех переменных:

$$E_{32b1}(a_1, a_2, b; c; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{n+2p}(a_2)_m (b)_{n-p}}{(c)_{m+n}\, m!\, n!\, p!} x^m y^n z^p.$$

Аналогично составляется система, которую удовлетворяет функция $u = E_{32b1}$:

$$\begin{cases} xu_{xx} + yu_{xy} + (c-x)u_x - a_2 u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} + xu_{xy} - yzu_{yz} + 2z^2 u_{zz} + \left[c - (a_1+b+1)y\right]u_y + (a_1 - 2b + 2)zu_z - a_1 bu = 0, \\ (1+4z)zu_{zz} - y(1-4z)u_{yz} + y^2 u_{yy} + 2(a_1+1)yu_y + \left[1 - b + (4a_1+6)z\right]u_z + a_1(a_1+1)u = 0. \end{cases}$$

Список использованной литературы.

[1].Бейтмен А., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Москва, Наука, 1973.

[2]. Srivastava H.M., Karlsson P.W., Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood, Chichester),Wiley, NewYork, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985.