A(Z)-ANALITIK FUNKSIYA VA UNING BA'ZI BIR XOSSALARI

Yusupova Shaxlo Baxtiyor qizi
Qarshi davlat universiteti stajyor-tadqiqotchi

Annotatsiya: Bizga ma'lumki kompleks o'zgaruvchili funksiyalarda potensiallar nazariyasi, dinamik sistemalar nazariyasi va tomografiyaga doir masalalarni o'rganish A(z)-analitik funksiyalar hamda kvazikonform akslantirishlarni o'rganishga olib keladi.
Hozirgi kunda A(z)-analitik funksiyalarni o'rganish kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining muhim vazifalaridan biri bo'lib kelmoqda.

Kalit so'zlar: Analitik funksiya, Koshi teoremasi, Shvars formulasi, Koshi formulasi, differensiallanuvchanlik.

Bizga ma'lumki kvazikonform akslantirishlar nazariyasi bilan bog'liq bo'lgan ushbu

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

Beltrami tenglamasining yechimi $A(z)-$*analitik funksiya* deb ataladi.

$A(z)$ - funksiya qaralayotgan $D \subset \mathbb{C}$ sohaning deyarli barcha nuqtalarida $|A(z)| \le C < 1$ shartni qanoatlantiradi. C=const.

U holda (1) ga ko'ra $A(z)-$ analitik funksiyalar sinfi $f \in O_A(D)$, ushbu $\bar{D}_A f = 0$ tenglama yordamida xarakterlanadi.

Ta'rif 3. Agar $\forall z \in D$ nuqta uchun

$$D_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial z} - \overline{A(z)}\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa u holda differensiallanuvchi $f(z)$ funksiya D sohada $A(z)-$ *antianalitik* deyiladi.

Xossa. Agar $f(z)$ funksiya $A(z)-$analitik funksiya bo‘lsa, u holda $\overline{f(z)}$ funksiya $A(z)-$antianalitik funksiya bo‘ladi.

Shunday qilib, antianalitik funksiyalar cheksiz silliq bo‘lganligidan $O_A(D)\subset C^{\infty}(D)$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema. *(Koshi teoremasining analogi).* Agar $f\in O_A(D)\cap C(\bar{D})$ bo‘lsa, bunda $D\subset\mathbb{C}-$ ∂D to‘g‘rilanuvchi chegaradan iborat soha bo‘lsa, u holda $\int\limits_{\partial D} f(z)\left(dz+A(z)d\,\bar{z}\right)=0$ bo‘ladi.

$D\subset\mathbb{C}-$ soxani qavariq deb faraz qilamiz va $\xi\in D-$ fiksirlangan nuqta bo‘lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}},\qquad (2)$$

bu yerda $\gamma(\xi,z)-\xi,\ z\in D$ nuqtalarni tutashtiruvchi silliq chiziq. $D-$ bir-bog‘lamli soha va $\bar{A}(z)-$ golomorf funksiya bo‘lganligi sababli, $I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau$ integral integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaydi va boshlang‘ich bilan ustma-ust tushadi $I'(z)=\bar{A}(z)$.

Teorema. $K(z,\xi)$ funksiya $z=\xi$ nuqtadan tashqarida $A(z)-$ analitik, ya’ni $K\in O_A(D\setminus\{\xi\})$ da $A-$analitik funksiya bo‘ladi. Shu bilan birga $z=\xi$ nuqtada funksiya $K(z,\xi)$ birinchi tartibli qutbga ega.

Aytaylik, $D\subset\mathbb{C}$ qavariq soha va $\psi(z,\xi)\in O_A(D)$ funksiya ichki akslantirishni amalga oshirsin.

Quyidagi $L(\xi,r)=\left\{z\in D:\ \left|\psi(z,\xi)\right|=\left|z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}\right|<r\right\}$ to‘plam markazi ξ bo‘lgan $A-$*lemniskata* deyiladi. . Bu to’plam D da ochiq to‘plam bo’ladi, yetarlicha kichik $r>0$ uchun Dda kompakt yotadi va ξ nuqtani o‘z ichiga oladi. (Maksimum prinsipiga ko‘ra lemniskata $L(\xi,r)$ bir bog‘lamli va minimum prinsipiga ko‘ra u bog‘lamli.)

Teorema. *(Koshi formulasining analogi).* Aytaylik, $D\subset\mathbb{C}$ $-$qavariq soha va $G\subset D-$ ∂G chegarasi bo‘lakli silliq ixtiyoriy qism soha. U holda ixtiyoriy $f(z)\in O_A(G)\cap C(\bar{G})$ funksiya uchun quyidagi formula o‘rinli

$$f(z)=\int_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ \ z\in G. \tag{3}$$

Natija. ***(** *$A(z)-$analitik funksiya uchun Shvars formulasining analogi* ***)**.*

Aytaylik, $L(a,R)\subset\subset D$ va $f\in O_A\left(L(a,R)\right)\cap C\left(\bar{L}(a,R)\right),$

$\operatorname{Re} f(\xi)=\varphi(\xi),\ \xi\in\partial L(a,R)$ bo‘lsa, u holda

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\oint_{|\psi(\xi,a)|=r}\frac{\varphi(\xi)\left(d\xi+Ad\bar{\xi}\right)}{\psi(\xi,z)}-\bar{f}(a). \tag{4}$$

bo‘ladi.

Bu formula $\partial L(a,R)$ dagi $\operatorname{Re} f(\xi)=\varphi(\xi)$ haqiqiy qiymatiga qarab $A(z)-$analitik funksiyani tiklash mumkinligini bildiradi.

Har qanday funksiya $\psi(z)\in L^1_{loc}(D)$

$$\psi*\varphi=\psi(\varphi)=\iint_D\psi(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i},$$

formulaga nisbatan umumlashgan funksiyani aniqlaydi, bunda $\varphi\in F(D):=\left\{\varphi\in C^\infty(D):\operatorname{supp}\varphi\subset\subset D\right\}$. Agar $u-$ikki marta differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda $\Delta_A u(\varphi)$ xuddi shunday tarzda umumlashgan funksiyani aniqlaydi:

$$\Delta_A u(\varphi)=\iint_D\Delta_A u(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i},\ \ \varphi\in F(D).$$

Boshqa tomondan $\Delta_A u(\varphi)=u(\Delta_A\varphi)$ o‘rinli, ya’ni

$$\iint_D\Delta_A u(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i}=\iint_D u(z)\Delta_A\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i},\ \ \varphi\in F(D).$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro’yxati

1. Шабат Б.В. «Введение в комплексный анализ» .1 часть. М.1976 г. 343 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции, М., <<Наука>>, 1988, 512 с
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. «Методы теории функций комплексный переменного» 1976 г. 453 с.
4. Sadullayev A., Jabborov N.M. On a class of A-analitic functions, Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016 y 9(3),c.374-383
5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. Наука. 1972 г. 467 с.