

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ ИНСТРУМЕНТОВ SIMULINK И SIMSCAPE ДЛЯ АНАЛИЗА СИСТЕМ “МАССА-ПРУЖИНА-ДЕМПФЕР” С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Asanov Seyran Enverovich

Туринский Политехнический Университет в Ташкенте

Аннотация: В данной статье описывается решение системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающих движение системы “масса-пружина-демпфер” с двумя степенями свободы с принудительным возбуждением с использованием инструментов MATLAB Simulink и Simscape. Результаты показывают, что обе модели показывают довольно схожие результаты. Очевидным преимуществом модели Simulink является то, что инженер имеет полный контроль над дифференциальным уравнением, которое он должен реализовать в модели, тогда как модель Simscape предоставляет готовое решение в виде “физических” блоков, представляющих реальные физические компоненты.

Ключевые слова: Уравнения Лагранжа, система “масса-пружина-демпфер”, Simulink, Simscape.

I. Вступление.

В данной работе представлена задача о системе масса-пружинный демпфер с 2 степенями свободы с входной силой, приложенной ко второй массе. Модель исследуемой системы представлена на рисунке 1. Стратегия анализа начинается с разработки математической модели с помощью уравнений Лагранжа второго рода, применяемых к системе. После этого будет предложена модель Simulink для численного решения аналитических уравнений. Кроме того, модель Simscape будет представлена в качестве возможной альтернативы модели Simulink. Позже результаты обеих моделей будут сопоставлены. Примечательно, что для объема работы синусоидальная входная сила $F = F_0 \sin(\omega t)$. Кроме того, коэффициенты демпфирования для двух демпферов, задействованных в модели, предполагаются постоянными. Параметры задачи

представлены в таблице 1. Так же, начальные условия заданы следующим образом:

$$x_1(0) = 0; \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0; \dot{x}_2(0) = 0$$

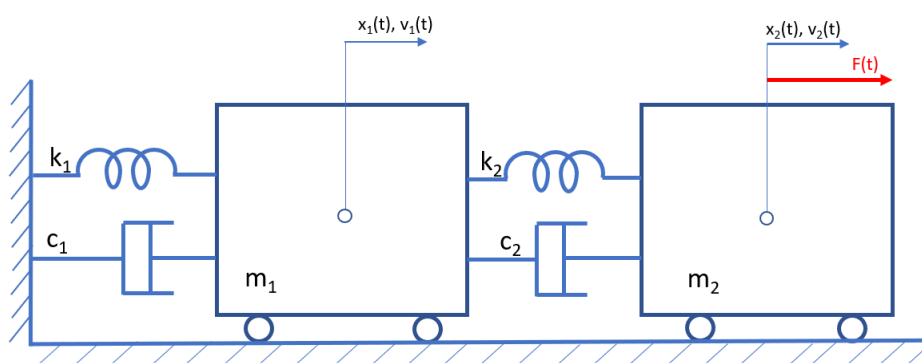


Рисунок. 1 Система "масса-пружина-демпфер" с двумя степенями свободы

Параметры системы	Значение	Единица измерения
Масса m_1	70	Kg
Масса m_2	140	Kg
Жесткость первой пружины k_1	500	N/m
Жесткость второй пружины k_2	250	N/m
Коэффициент демпфирования c_1	10	Ns/m
Коэффициент демпфирования c_2	50	Ns/m
Амплитуда F_0	100	N
Частота колебаний силы \square	4	rad/s

Таблица 1 Параметры изучаемой системы.

II. Методология разработки математической модели.

Важным шагом в решении поставленной задачи является разработка математической модели, описывающей движение системы. Для этого мы определяем уравнения движения вышеупомянутой системы с помощью Лагранжа уравнения второго рода [1]. Общая форма уравнения Лагранжа [2] [3] представлена уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} + \frac{\partial E_p}{\partial q_k} = Q_{b_k} \quad k=1,2,\dots,n,$$

Где q_k - являются обобщенными координатами, E_k - кинетическая энергия системы, E_p - потенциальная энергия системы и Q_{b_k} - обобщенная сила. Для того чтобы получить требуемые уравнения, нам необходимо определить кинетическую и потенциальную энергии системы. Если мы определим обобщенные координаты как

$$q_1 = x_1$$

$$q_2 = x_2$$

И обобщенные скорости как

$$\dot{q}_1 = \dot{x}_1$$

$$\dot{q}_2 = \dot{x}_2$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий масс m_1 и m_2 :

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2.$$

Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий пружин k_1 и k_2 :

$$E_p = \frac{1}{2} m_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Обратите внимание, что у второй пружины оба конца находятся в движении. По этой причине необходимо учитывать относительное расширение/сжатие $(x_2 - x_1)$.

Ввиду того, что в исследуемой системе также присутствуют демпферы, необходимо ввести термин, характеризующий рассеивание энергии. Для этой цели мы используем функцию рассеивания Рэля. Функция рассеивания Рэля может быть выражена следующим образом с точки зрения коэффициентов демпфирования c_1 и c_2 и скоростей масс \dot{x}_1 and \dot{x}_2 :

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2.$$

Аналогично случаю потенциальной энергии, второй член функции рассеивания Рэля зависит от относительной скорости заслонки $(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$, поскольку оба конца второго демпфера находятся в движении.

Необходимо также принимать во внимание обобщенные силы. В частном случае исследуемой проблемы только обобщенная сила, относящаяся ко второй массе, отлична от нуля, поскольку к массе m_2 приложена входная сила:

$$Q_{b1} = 0,$$

$$Q_{b2} = F(t)$$

Подставляя обобщенные координаты, потенциальную энергию системы можно выразить как:

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 x_2 x_1 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2$$

В то же время функция рассеивания Рэля может быть разработана как

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{x}_2^2 - c_2 \dot{x}_2 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} c_2 \dot{x}_1^2$$

Принимая во внимание расположение обобщенных координат и функции рассеивания, уравнения Лагранжа второго рода для механической системы на рисунке 1 имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = - \frac{\partial E_p}{\partial x_1} - \frac{\partial D}{\partial x_1} + Q_{b1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_2} = - \frac{\partial E_p}{\partial x_2} - \frac{\partial D}{\partial x_2} + Q_{b2}$$

Вычислив частные производные кинетической и потенциальной энергий, а также функцию диссипации Рэля и подставив их в уравнения Лагранжа, мы можем получить систему уравнений движения:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1) - \frac{b_1}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{b_2}{m_1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{b_2}{m_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{F(t)}{m_2}$$

Таким образом, решаемая система состоит из линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Массы, жесткость пружин и коэффициенты демпфирования принимаются постоянными. В связи с этим нам предстоит решить систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Разработанная математическая модель будет решена с использованием Simulink и Simscape. В заключении будет проведено сравнение результатов, полученных обоими численными инструментами.

III. Результаты.

Как обсуждалось в предыдущей главе, неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами предлагается решать с использованием численного средства MathWorks под названием Simulink [4]. Модель изучаемой системы, выполненной в Simulink, приведена на рисунке 2.

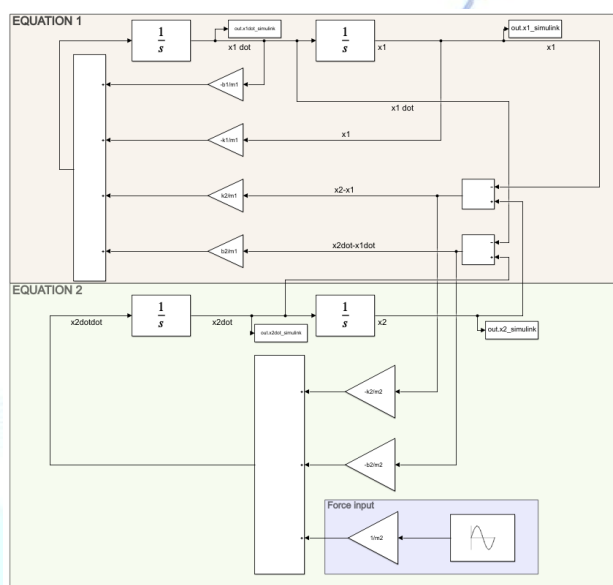


Рисунок. 2 Математическая модель рассматриваемой системы в Simulink

Simscape [5] — это встроенный инструмент Simulink, позволяющий создавать “физические” модели различных систем. То есть вместо уравнений и математических блоков могут быть введены блоки, представляющие физические объекты. Каждый “физический” блок Simscape содержит внутри себя математические соотношения, описывающие систему. Модель Simscape, предложенная для статьи, представлена на рисунке 3.

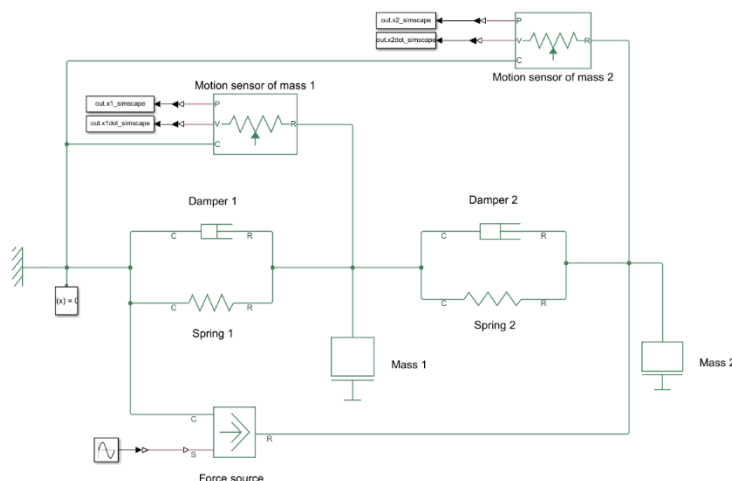


Рисунок. 3 Модель рассматриваемой системы в Simscape

Для сопоставления обеих моделей, каждая из них была запущена по отдельности. После окончания вычислительных операций, были получены результаты в виде перемещений масс ($x_2 - x_1$) и их скоростей ($\dot{x}_2 - \dot{x}_1$). Для сравнительного анализа взяты графики перемещения масс m_1 и m_2 . График перемещений массы m_1 для обеих моделей приведен на рисунке 4.

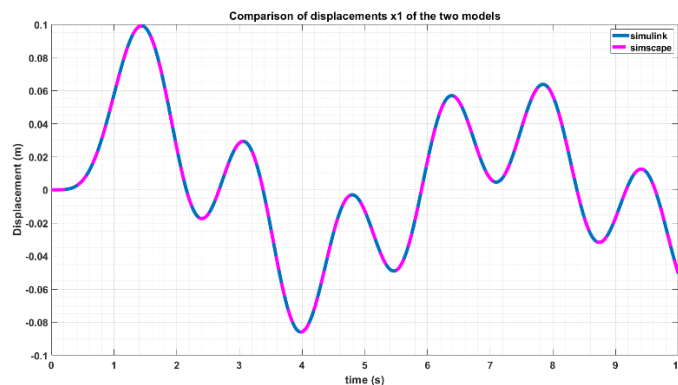


Рисунок. 4 Сравнение графиков перемещений массы m_1

В то же время, график скорости массы m_2 выглядит следующим образом (рисунок 5):

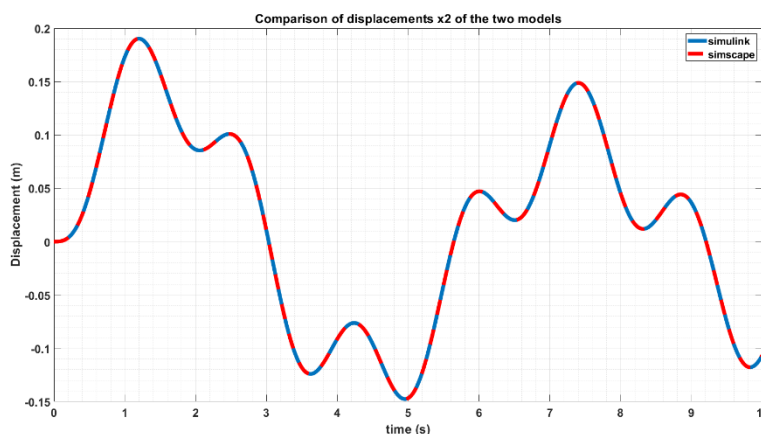


Рисунок. 5 Сравнение графиков перемещения массы m_2

IV. Заключение.

Как показано на рисунке 4, обе модели показывают более или менее идентичные результаты с точки зрения перемещений x_1 массы m_1 . Совершенно аналогично, перемещения x_2 массы m_2 (рисунок 5), полученные из предложенных двух моделей, также почти идентичных [6].

В этой статье были продемонстрированы два различных подхода к моделированию систем масса-пружина-амортизатор с несколькими степенями свободы. Первое связано с построением математической модели с использованием разработанной системы линейных дифференциальных уравнений, тогда как второе больше связано с физическим моделированием механических систем с помощью блоков специального назначения. В целом, результаты показывают, что обе модели хорошо решают систему линейных уравнений. Преимущество модели Simulink заключается в том, что инженер

имеет полный контроль над моделью, которую он создает, в то время как модель Simscape содержит математические взаимосвязи внутри каждого "физического блока".

V. Используемая литература

- [1] D. H. Peter Sivák, «State-Space Model of a Mechanical System in MATLAB/Simulink,» *Procedia Engineering*, т. 48, pp. 629-635, 2012.
- [2] L. S., A. a. P. S., R. S., R. {Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations, Applied Mechanics Reviews*, 2001.
- [3] G. Genta, *Vibration Dynamics and Control*, Springer US, 2009.
- [4] M. inc., «Design models of dynamic systems in Simulink,» Mathworks, [В Интернете]. Available: <https://www.mathworks.com/help/matlab/language-fundamentals.html>.
- [5] «Model and simulate multidomain physical systems in Simscape,» [В Интернете]. Available: <https://www.mathworks.com/help/physmod/simscape/>.
- [6] S. ASANOV, «Comparative analysis of numerical tools Simulink and Simscape for the analysis of multi-degree of freedom mass-spring-damper systems.,» *Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent*, т. 11, № 2, pp. 21-24, 2021.