ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ашурова Зебинисо Рахимовна

Доцент каф, Точных наук.Уз-Фин.ПИ, доцент каф.

Математический анализ, СамГУ им. Ш.Рашидова.

Жураева Нодира Юнусовна

кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры высшей математика,

ТУИТ им. Мухаммада Ал-Хоразмий

Маллаева Феруза Уткуржоновна

Студентка 2 курса Математического факультета,

СамГУ им. Ш.Рашидова.

АННОТАЦИЯ

В этом работе изучается функции Карлемана- заданное в множестве 2-мерного Евклидово пространства $(\Delta^2 u(y) = 0)$, *с помощи её получается некоторые свойство полигармонические функции 2-го порядка.*

Ключевые слова: *гармонические функции, бигармонические функции, интегральное представление.*

ABSTRACT

In this article we consider Carleman's functions, to find integral representation for the polygarmonious functions $(\Delta^2 u(y) = 0)$ *defined in unbounded domain of Euclidean space obtaining an integral representation.*

Keywords: *Phragmen-Lindelof type theorems, biharmonic functions, Carleman's function, integral representation.*

Введение:

Если гармоническая функция и ее нормальная производная ограничены на границе D и u(P) неограниченна внутри, то при P → ∞ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, оценить эту предельную скорость роста. Эта задача была предметом исследования работ М.А.Евграфова, И.А.Чегиса, Е.М.Ландиса [1], Т.Карлемана М.М.Лаврентьева, Ш.Ярмухамедовым [2], З.Р.Ашуровой, Н.Жураевой и У.Жураевой [3]- [8], др.

Е.М.Ландис в книге -Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва, 1971 г.55 стр.)- поставил задачу в виде - Пусть в цилиндре $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{x}_l^2 < 1$ расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в оба стороны – все равно) в граница Г этой области как угодно гладка .

Пусть в области определено решение и уравнение $\Delta\Delta \mathrm{u} = 0$ как угодно гладкое вплоть до границы и $u|_\Gamma = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$. Следует ли отсюда, что неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность).

Первый результат в этом направлении в 1926 году получил Т.Карлеман (для класса ограниченных функций в области D одного специального вида.

М. М. Лаврентьев впервые разработал новую идею, связывающую исследова ние Т.Карлемана. Используя идеи М.М.Лаврентьева для гармонических функций а также для полигармонических функций заланных в ограниченных областях эту задачу Ш.Я.Ярмухамедов, в работе [2] впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа-так называемая в настоящей времены «функции Грина-Ярмухамедова».

Позже подбирая функцию Грина-Ярмухамедова нужным образом З.Р.Ашурова для некоторых неограниченных областей получая интегральное представление доказала несколько теорем типа Фрагмена-Линделефа и единственности для гармонических функций многих переменных.

Рассмотрим бигармонических функций заданные в области D,

$D = \left\{y: y = (y_1, y_2) \in R^2, -\infty < y_1 < \infty, y_2 \in R, 0 < y_2 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\right\}$, $r = \sqrt{\sum_{j=1}^{2}(y_j - x_j)^2}$, $s = (y_1 - x_1)^2$. Определяем функцию $\Phi(y, x)$ при $s > 0$:

$\Phi(y, x) = c_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{\exp(\omega^2)}{\omega - x_2}\right](u^2 - s)du$, $\omega = iu + y_2$.

при $A_0 = (y_2^2 - u^2)$, $A_1 = (r^2 t + s - y_2^2)$, $A_2 = 2uy_2$

Так, как данная функция имеет вид

$$\Phi(y, x) = c_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \exp A_0 \frac{(y_2 - x_2)\sin(A_2) - u\cos(A_2)}{((y_2 - x_2)^2 + u^2}(u^2 - s)du$$

Обозначая $J_1 = c_0 \int_0^{\infty} \frac{(y_m - x_m)\sin A_2}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{1}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)}$, $J_2 = c_0 \int_0^{\infty} \frac{\cos A_2}{\exp A_1} \frac{tdt}{(1+t)}$

имеем $\Phi(y, x) = r^2(J_1 - J_2)$.

Используя лемму доказываемой Умидахон Жураевой: Если $\phi_\sigma(y, x)$ гармоническая функция в R^m по переменной y включая и точку x, то справедливо равенство

$$\Delta r^k \phi_\sigma(y, x) = r^{k-2}\phi_{\sigma,1}(y, x), \text{ где}$$

$$\phi_{\sigma,1}(y, x) = k(m + k - 2)\phi_\sigma(y, x) + 2k\sum_{j=1}^{m}(y_j - x_j)\frac{\partial\phi_\sigma(y, x)}{\partial y_j}$$

функция тоже является гармонической функцией в R^2 по переменному y включая и точку x. т.е $r^2\phi_\sigma(y, x)$, является бигармонической функцией, легко доказать:

Теорема 1. Функция $\Phi(y, x)$ –бигармонических функция.

Доказательство теоремы. Так, как под интегралом мы можем дифференцировать поэтому легко докажем гармоничность $(J_1 - J_2)$, тогда используя лемму доказываемой Умидахон Жураевой функция $\phi_\sigma(y,x) = (J_1 - J_2)$, $\Phi(y,x)$ будет полигармоническая функция второго порядка.

Теорема 2. Для функции $\Phi(y,x)$: верно

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0\left(r^2 \ln r + G_\sigma(x,y)\right),$$

где $G_\sigma(y,x)$ регулярная по переменному y и непрерывно дифференцируемая на $\overline{D}$.

Теорема 3. Для функции $\Phi(y,x) = r^2(J_1 - J_2)$ справедлива неравенства: $|\Phi_\sigma(y,x)| \leq \left(\frac{1}{r}+1\right)\frac{c_0}{exp(A)}$, $A = ach\alpha\rho_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.М.Ландис. -Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва, 1971 г.55 стр.
2. Ярмухамедов.Ш,Я. Задача Коши для полигармонического уравнения. Доклады РАН 2003 том 388 ст 162-165.
3. Ашурова З.Р. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990, №5. 6-8 стр .
4. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews, India, 2020 ,7, C.371–378, DOI : 10.31938.jcr.07.06.62.
5. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function, Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra India, 2020, 10, C.371–378, URL : http://saarj.com.

6. Ashurova Z. R.Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis of Samarkand State University, Juraeva N. Yu.Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Departmentof Natural Sciences of TUIT, 721-733 REGULARIZATION FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS FOR SOME REGIONS IN $\boldsymbol{Rm}$

7. Ашурова Зебинисо Рахимовна кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры математического анализа СамГ У имени Ш. Рашидова,Узбекистан г. Самарканд, Жураева Нодира Юнусовна кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры высшей математика.НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ КАРЛЕМАНА. ТУИТ им. Мухаммада Ал-Хоразмий, Узбекистан JOURNAL OF NORTHEASTERN UNIVERSITY .Volume 26 Issue 01, 2023 ISSN: 1005-3026 https://dbdxxb.cn/ Original Research Paper.734-738.

8.Жураева У.Ю. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных. Известия вузов.Математика 2022,№10.с 42-65.https// kpfu.ru /science/nauchnye-izdaniya/ivrm, e-mail: izvuz. Matem@kpfu.ru