FUNKTSIYANIŃ SHARTSIZ EKSTREMUMIN KVAZINYUTON USILINDA TABIW

Allanazarov J.P

Ajiniyaz atındağı NMPI dotsenti

ANNOTATSIYA

Kóp ózgeriwshili funktsiyanıń shártsiz ekstremumın tabıwġa arnalġan kvazinyuton usılınıń basqa usıllardan ózgesheligi kórsetilgen ham onı ámelde qollanılıw jolı mısaldı sheshiwde qollanılġan.

ANNOTATSIYA

Koʻp oʻzgaruvchili funktsiyaning shartsiz ekstremumini topishġa bagʻishlangan kvazinyuton usulining boshqa usullardan xossasi yoritilgan va uni amalda qoʻllanilish yoʻli misolni yechishda qollanılġan.

АННОТАЦИЯ

Нахождению безусловного экстремума многомерной функции по сравнению с другими методами используется и метод квазиньютонов, приведены особенности из других методов и способ его применения на практике используя при решении примера.

ABSTRACT

To find the unconditional extremum of a multidimensional function in comparison with other methods, the quasi-Newton method is also used, features from other methods and a method of its application in practice are given using the example solution.

Nyuton usılın qollanıw ushın $f(x)$ funktsiyasının' Gesse matritsasın tawıp, og'an keri matritsanı anıqlaw kerek boladı. Ko'pshilik jag'daylarda minimum noqatı izlenip atırg'an $f(x)$ funktsiyasının' Gesse matritsası belgisiz bolıwı, ya onı esaplaw usılı qıyınshılıqlar menen baylanıslı bolıwı yamasa ol sanlı usıllardı qollanıw arqalı tabılıwı mu'mkin. Bunnan tısqarı, $n \times n$ o'lshemli Gesse matritsasına keri matritsanı esaplag'anda orınlanatug'ın ko'beytiw a'melinin' sanı n^3 qa proportsional boladı. Bul n nin' salıstırmalı u'lken bolmag'an ma'nislerinde a'dewir u'lken shama boladı.

Nyuton usılının' ko'rsetilgen kemshiliklerinen qutılıw ushın iteratsiyalıq protsesstin' barısında Gesse matritsasın ha'm og'an keri matritsanı jasaw talap etilmeytug'ın, al olardı juwıqlastırıw iske asırılatug'ın, onın' bir neshe o'zgertilgen tu'rleri islenip shıg'ılg'an. Bul iteratsiyalıq protsesstin' ha'r bir adımında orınlanatug'ın arifmetikalıq a'mellerdin' sanın a'dewir azaytıwg'a mwmkinshilik beredi. Sha'rtsiz ekstremum ma'selelerin sheshiwdin' bunday usılları *kvazinyutonlıq yamasa o'zgermeli o'lshemler usılları dep ataladı* ("kvazi" qosımtası latınnın' "quasi" degen so'zinen alıng'an bolıp, bizin'she "day", "dey", "tay", "tey", sıyaqlı, tap, uqsap qosımtalarına sa'ykes keledi). Belgili kvazinyuton usıllarının' ko'pshiligi, $f(x)$ funktsiyası Nyuton usılında ko'rsetilgen qa'siyetlerge iye bolg'anda, sızıqlıdan joqarı tezlik penen lokal jıynaqlı bolatug'ını da'lillengen [1,2,3].

Endi geypara kvazinyuton usıllarının' esaplaw algoritmleri menen tanısamız. Meyli $f(x)$ eki ret u'zliksiz differentsiallanatug'ın funktsiya bolsın. Sonda mına iteratsiyalıq usıldı qaraymız:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}, \quad h^{(k)} = -H_k f'(x^{(k)}) \qquad (1)$$

Bundag'ı H_k matritsasın, ol bazı bir ma'niste $\left(f''(x^{(k)})\right)^{-1}$ matritsasın juwıqlastırg'anday etip saylap alamız. Bunın' ushın

$$f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k+1)}) = f''(x^{(k+1)})(x^{(k)} - x^*) + 0\left(\left\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\right\|\right)$$

ten'liginde $f''(x^{(k+1)})$ aynımag'an matritsa dep uyg'arıp, $\left\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\right\|$ shaması menen salıstırg'anda a'dewir joqarı ta'rtipli kishi ag'zalarg'a shekemgi da'llik penen

$$\left(f''(x^{(k+1)})\right)^{-1}\left(f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)})\right) \approx x^{(k+1)} - x^{(k)} \qquad (2)$$

juwıq ten'ligin jazıwg'a boladı. Egerde bunda

$$f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x) \qquad (3)$$

ko'rinisindegi kvadratlıq funktsiya ha'm A-simmetriyalı on' anıqlang'an matritsa bolsa, onda $f'(x)=Ax+b, \quad f''(x)=A$ boladı. Bul jag'dayda (2) juwıq ten'ligi mına da'l ten'ligine aylanadı:

$$\left(f''(x^{(k+1)})\right)^{-1}\Delta y^{(k)}=\Delta x^{(k)},$$

$$\Delta x^{(k)}=x^{(k+1)}-x^{(k)}, \quad \Delta y^{(k)}=f'(x^{(k+1)})-f'(x^{(k)})$$

Sonlıqtan $\left(f''(x^{(k)})\right)^{-1}$ matritsasın juwıqlastırıwshı H_{k+1} matritsası ushın

$$H_{k+1}\ \Delta \mathrm{y}^{(\mathrm{k})}=\Delta \mathrm{x}^{(\mathrm{k})} \qquad \textbf{(4)}$$

sha'rtinin' orınlanıwın talap etiw ta'biyg'ıy na'rse boladı. Bul sha'rt *kvazinyutonlıq sha'rt dep ataladı*. Ol $(f'')^{-1}$ matritsasın juwıqlastırıwdın' ko'plegen usıllarının' tiykarında jatadı. Ha'r bir adımında (3) kvazinyutonlıq sha'rtleri orınlanatug'ın, *sha'rtsiz ekstremum ma'selelerin sheshiw usılları da kvazinyutonlıq usıllar dep ataladı.*

Meyli iteratsiyalıq usıldın' bir adımınan ekinshisine o'tkende $(f'')^{-1}$ matritsasın juwıqlastıratug'ın matritsa

$$H_{k+1}=H_k+\Delta H_k \qquad (5)$$

formulası menen anıqlanatug'ın bolsın. Bundag'ı qosımsha ΔH_k matritsasın (4)-sharti orınlang'anday etip saylap aladı. Bunın' ushın (4)-ni to'mendegi ko'riniste jazadı:

$$\Delta H_k\ \Delta \mathrm{y}^{(\mathrm{k})}=\Delta \mathrm{x}^{(\mathrm{k})}-H_k\ \Delta \mathrm{y}^{(\mathrm{k})}$$

Bul ten'likti

$$\Delta H_k=\frac{1}{\left(z^{(k)},\Delta y^{(k)}\right)}\left(\Delta x^{(k)}-H_k\Delta y^{(k)}\right)\cdot z^{(k)} \qquad (6)$$

formulası menen anıqlang'an, rangi 1 ge ten' matritsa qanaatlandıradı. Bunda $z^{(k)},\left(z^{(k)},\Delta y^{(k)}\right)\neq 0$ sha'rtin qanaatlandıratug'ın, qa'legen vektor. Bul jerde ha'm paragraftın' aqırına shekem $u=(u_1,u_2,...,u_m), \ v=(v_1,v_2,...,v_n)$ vektorları ushın

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ - & - & - & - \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix}$$

belgilewi paydalanıladı.

Sonda $z^{(k)} = \Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}$ dep alıp ha'm (6) da $(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}) \neq 0$ dep uyg'arıp, (5) ni to'mendegishe jazıwg'a boladı:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}\right) \cdot \left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}\right)}{\left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} \tag{7}$$

Ko'binese, (3) sha'rtin qanaatlandıratug'ın mına formulalardan da paydalanadı:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} - \frac{H_k\left(\Delta y^{(k)} \cdot \Delta y^{(k)}\right)H_k}{\left(H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} H_{k+1} = H_k + \left[1 + \frac{\left(H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}\right] \frac{\Delta x^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} - \\ - \frac{\left(\Delta x^{(k)} \cdot \Delta y^{(k)}\right)H_k}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} - \frac{H_k\left(\Delta y^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}\right)}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} \end{gathered} \tag{9}$$

Bul (7), (8), (9) formulalarınan paydalang'anda baslang'ısh H_0 matritsası esabında qa'legen on' anıqlang'an simmetriyalı matritsanı alıwg'a boladı. İs ju'zinde H_0 matritsası esabında ko'binese birlik matritsanı aladı.

Kvazinyutonlıq usıllarda adımnın' uzınlıg'ı ko'pshilik jag'daylarda, berilgen to'men tu'siw bag'ıtının' u'stinde

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} + \alpha h^{(k)}) \tag{10}$$

ma'selesinin' sheshimi esabında anıqlanadı. Ayırım jag'daylardı adımnın' uzınlıg'ın saylap alıwdın' basqa usıllarınan da paydalanadı. Ma'selen, Nyuton usılındag'ı sıyaqlı $\alpha_k = 1$ dep aladı yamasa α_k nin' ma'nisi adımdı maydalaw arqalı anıqlanadı ((4.6) formulasına qaran').

Dara jag'dayda (3) kvadratlıq funktsiyası ushın (1), (7)-(9),(10) u'sh usılı da qa'legen $x^{(0)} \in E^n$ baslang'ısh juwıqlasıwınan birdey $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ noqatlar izbe-izligine alıp keledi. Sonın' menen birge, $H_n = \left(f''(x^{(n)})\right)^{-1} = A^{-1}$, $x^{(n)} = x^* = -A^{-1}b = \arg\min_{x \in E^n} f(x)$

ten'likleri orınlanadı, yag'nıy kvazinyutonlıq usıllar kvadratlıq funktsiyanın' minimumın n adımda tabıwg'a mu'mkinshilik beredi.

Kvadratlıq emes funktsiyalar ushın bunday jag'daylar durıs bola bermeydi. Biraqta, bazı bir uyg'arıwlarda $k \to \infty$ ke umtılg'anda

$$H_k - \left(f''(x^{(k)})\right)^{-1} \to 0, \quad x^{(k)} \to x^*$$

umtılatug'ının ha'm jıynaqlılıq tezligi sızıqlıdan joqarı bolatug'ının ko'rsetiwge boladı [12,21,23]. Ma'selen, egerde $f(x)$ E^n ken'isliginde eki ret u'zliksiz differentsiallanatug'ın, qatan' oyıs funktsiya bolsa, onda qa'legen $x^{(0)} \in E^n$ baslang'ısh juwıqlasıwında (1), (8), (10) formulaları menen anıqlang'an $\{x^{(k)}\}$ noqatlar izbe-izligi x^* minimum noqatına jıynaqlı boladı. Al, egerde $f(x) \le f(x^{(0)})$ ten'sizligin qanaatlandıratug'ın barlıq x lar ushın

$$\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le M\|x - x^*\|, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$$

ten'sizlikleri orınlı bolsa, onda $\{x^{(k)}\}$ noqatlar izbe-izligi x^* noqatına sızıqlıdan joqarı tezlik penen jıynaqlı boladı [4].

Kvazinyutonlıq usıllardın' o'zgermeli o'lshemler usılı dep te atalıwının' ma'nisi mınada. Qa'legen simmetriyalı ha'm on' anıqlang'an H_k matritsası $(u,v)_k = (H_k u, v)$ skalyar ko'beymesin ha'm onın' menen baylanısqan o'lshemdi anıqlaydı. Haqıyqatında da, $f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) - f(x^{(k)})$ o'siminin' sızıqlı u'lesi

$\left(f'(x^{(k)}), \Delta x^{(k)}\right) = \left(H_k H_k^{-1} f'(x^{(k)}), \Delta x^{(k)}\right) = \left(H_k^{-1} f'(x^{(k)}), \Delta x^{(k)}\right)_k$ ko'rinisine iye boladı. Sonlıqtan, $H_k^{-1} f'(x^{(k)})$ vektorın $(,)_k$ skalyar ko'beymeli ken'isliktin' $x^{(k)}$ noqatındag'ı *f(x)* funktsiyasının' gradienti dep esaplawg'a boladı. Solay etip, (1) usılı gradientlik usıldın' o'zgermeli o'lshemli ken'islik ushın ulıwmalastırılıwı boladı.

Kvazinyutonlıq usıllar sha'rtsiz optimizatsiyalaw ma'selelerin sheshiwdin' na'tiyjeli usılları boladı. Olar jetkilikli joqarı jıynaqlılıq tezligine iye bolıp, esaplaw algoritmlerin iske asırg'anda funktsiyanın' ekinshi ta'rtipli dara tuwındılarınan du'zilgen Gesse matritsasın ha'm og'an keri matritsanı anıqlaw sıyaqlı u'lken ko'lemdegi esaplaw jumısların orınlawdı talap etetug'ın quramalı ma'seleler sheshilmeydi. Biraqta bul usıllar mınaday kemshilikke iye: ken'isliktin' o'lshemi n u'lken bolg'anda iteratsiyalıq protsesstin' ha'r bir adımında H_k matritsaların esaplaw ha'm saqlaw EEM nin' yadının' ko'lemine joqarı talaplar qoyadı.

Mısal. To'mendegi kvadratlıq funktsiyanın' minimum noqatın kvazinyutonlıq usıl menen tabın':

$$f(x_1,x_2)=4x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2+x_1$$

Sheshiliwi. Ma'selenin' sheshimine $x^{(0)}=(0,0)'$ baslang'ısh juwıqlasıwın alıp, kvazinyutonlıq usıldı qollanıw ushın to'mendegi esaplawlardı orınlaymız:

$$f'(x)=(8x_1-4x_2+1;\ 6x_2-4x_1), \quad f'(x^{(0)})=(1,0)', \quad f(x^{(0)})=f(0,0)=0$$

1-adımı. a) $h^{(0)}=-f'(x^{(0)})=-f'(0,0)=(-1,0)'$;

$$x^{(1)}=x^{(0)}-\alpha\cdot f'(x^{(0)})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\0\end{pmatrix};$$

$$\varphi_0(\alpha)=4(-\alpha)^2+(-\alpha)=4\alpha^2-\alpha,$$

$$\varphi_0'(\alpha)=8\alpha-1=0, \quad \alpha=\alpha_0=1/8;$$

$$x^{(1)}=(-1/8,\ 0)';$$

$$f'(x^{(1)})=(0,\ 1/2)';$$

b) $k=1$ bolg'anda $H_1=H_0+\Delta H_0$, $H_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E$ - birlik matritsa;

v) ΔH_0 ha'm H_1 matritsaların anıqlaw ushın (8) formulasınan paydalanamız. Bunın' ushın da'slep to'mendegi shamalardı esaplaymız:

$$\Delta x^{(0)}=x^{(1)}-x^{(0)}=\begin{pmatrix}-1/8\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/8\\0\end{pmatrix}=(-1/8,\ 0)';$$

$$\Delta y^{(0)}=f'(x^1)-f'(x^0)=\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}=(-1,\ 1/2)';$$

$$\Delta x^{(0)}\cdot\Delta x^{(0)}=\begin{bmatrix}1/64&0\\0&0\end{bmatrix}; \quad \Delta y^{(0)}\cdot\Delta y^{(0)}=\begin{bmatrix}1&-1/2\\-1/2&1/4\end{bmatrix};$$

$$(\Delta x^{(0)},\Delta y^{(0)})=1/8; \quad \frac{\Delta x^{(0)}\cdot\Delta x^{(0)}}{(\Delta x^{(0)},\Delta y^{(0)})}=8\begin{bmatrix}1/64&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/8&0\\0&0\end{bmatrix};$$

$$H_0\Delta y^{(0)}=(-1,\ 1/2)', \quad (H_0\Delta y^{(0)},\ \Delta y^{(0)})=5/4;$$

$$H_0(\Delta y^{(0)}\cdot\Delta y^{(0)})H_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1/2\\-1/2&1/4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1/2\\-1/2&1/4\end{bmatrix};$$

$$\frac{H_0(\Delta y^{(0)}\cdot\Delta y^{(0)})H_0}{(H_0\Delta y^{(0)},\Delta y^{(0)})}=\frac{4}{5}\begin{bmatrix}1&-1/2\\-1/2&1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4/5&-2/5\\-2/5&1/5\end{bmatrix};$$

$$H_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/8&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4/5&-2/5\\-2/5&1/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13/40&2/5\\2/5&4/5\end{bmatrix}$$

g) H_1 matritsasının’ durıs tabılg‘anlıg‘ına iseniw ushın (4) kvazinyutonlıq sha’rtinin’ orınlanıwın ko‘remiz:

$$H_1\Delta y^{(0)}=\begin{bmatrix}13/40&2/5\\2/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/8\\0\end{bmatrix}$$

Demek, $H_1\Delta y^{(0)}=\Delta x^{(0)}=(-1/8,\ 0)'$, yag‘nıy kvazinyutonlıq sha’rti orınlandı.

2-adımı. a) $H_1 f'(x^{(1)})=\begin{bmatrix}13/40&2/5\\2/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5\\2/5\end{bmatrix};$

b) $x^{(2)}=x^{(1)}-\alpha\cdot H_1 f'(x^{(1)})=\begin{pmatrix}-1/8\\0\end{pmatrix}-\alpha\cdot\begin{pmatrix}1/5\\2/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/8-1/5\alpha\\-2/5\alpha\end{pmatrix};$

$$\varphi_0(\alpha)=4\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right)^2+3\left(-\frac{2}{5}\alpha\right)^2-4\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right)\left(-\frac{2}{5}\alpha\right)+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right),$$

$$\varphi_0'(\alpha)=8\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right)\left(-\frac{1}{5}\right)+6\left(-\frac{2}{5}\alpha\right)\left(-\frac{2}{5}\right)-4\left(\frac{1}{20}+\frac{4}{25}\alpha\right)-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{25}\alpha+$$
$$+\frac{24}{25}\alpha-\frac{1}{5}-\frac{16}{25}\alpha-\frac{1}{5}=\frac{8\alpha+24\alpha-16\alpha}{25}-\frac{1}{5}=\frac{16}{25}\alpha-\frac{1}{5},\quad \frac{16}{25}\alpha-\frac{1}{5}=0,$$
$$\alpha=\alpha_1=5/16;\quad x_1^{(2)}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{16}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=-\frac{3}{16},\quad x_2^{(2)}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{16}=-\frac{1}{8},$$
$$x^{(2)}=(-3/16,-1/8)';\quad f(x^{(2)})=-3/32,\quad f'(x^{(2)})=f'(-3/16,-1/8)=(0,0)'$$

Demek, $x^*=x^{(2)}=(-3/16,-1/8)'$ vektorı berilgen ma’selenin’ sheshimi boladı. Berilgen funktsiya kvadratlıq funktsiya bolg‘anlıqtan ha’m esaplawlar qa’tesiz orınlang‘anlıqtan ma’selenin’ da’l sheshimi kvazinyutonlıq usıldın’ ekinshi adımında aq tabıldı.

Kvazinyutonlıq usıllardı qollanıwg‘a baylanıslı, olardın’ mınaday jaqsı qa’siyetin ayrıqsha atap o‘temiz: k nın’ o‘siwi menen H_k matritsası Gessenin’ $J^{-1}(x^{(k)})$ keri matritsasına umtıladı. Ma’selen, joqarıdag‘ı mısal jag‘dayında

$$J=\begin{bmatrix}8&-4\\-4&6\end{bmatrix},\quad J^{-1}=\begin{bmatrix}3/16&1/8\\1/8&1/4\end{bmatrix}$$

boladı. Endi (8) formulasınan paydalanıp, H_2 matritssın esaplaymız:

a) $\Delta x^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = (-1/16,\ -1/8)'$,

$\Delta y^{(1)} = f'(x^2) - f'(x^1) = (0,\ 0)' - (0,\ 1/2)' = (0,\ -1/2)'$;

b) $H_2 = \begin{bmatrix} 13/40 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$;

v) $H_2 \Delta y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 \\ -1/8 \end{bmatrix} = (-1/16,\ -1/8)'$, $H_2 \Delta y^{(1)} = \Delta x^{(1)} = (-1/16,\ -1/8)'$

yag‘nıy kvazinyutonlıq sha’rti orınlandı. Demek, H_2 matritsası durıs tabılg‘an. Solay etip, bul esaplawlardan $H_2 = J^{-1}$ bolatug‘ını kelip shıg‘adı.

ADEBIYATLAR, СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ: (REFERENCES)

1. Otarov A.O., Allanazarov J.P., Otarov A.A. Siziqlı emes programmalastırıw máselelerin sheshiw usılları. Nókis. Bilim. 2009.
2. Gabasov R., Kirillova F.M. Metodi optimizatsii. Minsk. BGU. 1981.
3. Grill F., Myurrey U., Rayt M. Prakticheskaya optimizatsiya. M. Mir.1985.
4. Rekleytis G., Reyvindran A., Regsdel K. Optimizatsiya v texnike, T.1. M. Mir, 1986.