PARABOLIK TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Sulaymonova Oygul Abdulatif qizi

Farg‘ona davlat universiteti, 1-bosqich magistranti

Yuldasheva Yoqutxon Nosirovna

Farg‘ona davlat universiteti, 1-bosqich magistranti

Kuchkarova Maqsudaxon Rasuljon qizi

Farg‘ona davlat universiteti, 1-bosqich magistranti

oygulgofurova0405@gmail.com

ANNOTATSIYA

Maqola parabolik tenglamalar uchun chegaraviy bir masala haqida bo‘lib matematik fizikaning tayanch nostatsionar tenglamasi sifatida bir o‘lchovli ikkinchi tartibli parabolik tenglama ishtrok etgan. Masala to‘rtburchak sohada ko‘riladi.

Biz bu masalada yechimning yagonaligi va uning kirish ma’lumotlari uzluksiz bog‘likligi bilan cheklanuvchi yechimning mavjudligi masalasini qaraymiz va yechimni olamiz.

Kalit so‘zlar: *Evalyutsion tenglama, Gronuollya lemmasi, Koshi masalasi, aprior baho, turg‘unlik, chegaraviy va boshlang‘ich shartlar, klassik yechim.*

KIRISH

Differensial tenglamalar fizik jarayonlarning matematik modelidan iborat bo‘lib, uning koeffisientlari ob’ektning xossalarini anglatadi. Fizik ob’ektning xossalarini aniqlash (tenglama koeffisientlarini yoki o‘ng tomonini topish) differensial tenglamalar uchun teskari masalalar nomi bilan yuritiladi va matematikaning zamonaviy yo‘nalishlaridan hisoblanadi. Differensial tenglamalar uchun teskari masalalar fizika va geofizikaning asosiy masalalaridan hisoblanadi. Masalan seysmik jarayonlar teskari masalasi, tarqalish (rasseyanie) jarayonining teskari masalasi, gravimetriya teskari masalasi va boshqalar. Shuni qayd qilib oʻtamizki, 1979 yilda bir guruh AQSh olimlariga medisinaning tomografiya uslubini yaratganligi uchun Nobel mukofoti berildi. Tomografiya uslubining asosiy qismi teskari masalalardan va integral geometriya masalalaridan iborat. Integral geometriya masalasi yechimining yagonaligi va turgʻunligini aniqlashda A.X.Begmatov muhim natijalarga erishgan .

Shturm - Liuvill tenglamasi uchun teskari masalalar operator bilan bogʻliq. Bunda spektral xarakteristikalar yordamida Shturm - Liuvill operatorining koefisentini va chegaraviy shartlarini topish talab qilinadi. Bunda olingan natijalar B.M. Levitan, A.B. Xasanov monografiyalarida [1] chop etilgan.

Ushbu maqolaning maqsadi zamonaviy matematikaning intensiv ravishta rivojlanayotgan nokorrekt va teskari masalalari bilan yuqori kurs matematika va fizika yoʻnalishi talabalarini xabardor qilishdan iborat.

ADABIYOTLAR TAXLILI VA METODOLOGIYASI

Parabolik tipdagi tenglamalarning klassik vakili issiqlik oʻtkazuvchanlik tenglamasi. Ushbu tengalamaga qoʻyilgan Koshi masalasi va aralash masalalarni, ya’ni toʻgʻri masalalarni analitik yechish usullari [8-9] “Xususiy hosilali differensial tenglamalar” kursida oʻqitiladi. Shuningdek hozirgi kunda xususiy hosilalarga qoʻyiladigan teskari masalalar ham oʻrganib kelinmoqda [4-7]. Dastlab qisqacha analitik usullarga toʻxtalamiz, soʻng taqribiy yechish usullarini bayon qilamiz

Natijalar

Matematik fizikaning tayanch nostatsionar tenglamasi sifatida bir oʻlchovli ikkinchi tartibli parabolik tenglamani qaraymiz.

Masala. Ushbu

$$\overline{Q_T} = \overline{\Omega} * [0,T], \overline{\Omega} = \{x | 0 \le x \le l,\}, 0 \le t \le T$$

toʻrtburchak sohada

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x})+f(x,t), \qquad (1)$$

tenglamaning

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0, 0\le t\le T \qquad (2)$$

chegaraviy(birinchi tur) va

$$u(x,0)=u_0(x), 0\le x\le l \qquad (3)$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Matematik fizikaning ba’zi masalalarini (1)-(3) ko‘rinishdagi bir o‘lchovli parabolik tenglamalar uchun sodda chegaraviy masala misolida namoyish etamiz. Biz bu yerda yechimning yagonaligi va uning kirish ma’lumotlari uzluksiz bog‘likligi bilan cheklanuvchi yechimning mavjudligi masalasini qaraymiz. (1)-(3) tenglama u(x,t) klassik yechimga(masalan x bo‘yicha ikki marta uzluksiz

Differrensialanuvchi, t bo‘yicha uzluksiz differrensialanuvchiga ega deb hisoblaymiz.

(1) - (3) tenglamani birinchi martibli differensial – operator tenglama uchun Koshi masalasi sifatida yozamiz.

Ω= (0,1) sohada bo‘lgan va chegaraviy nuqtalarda(δΩda) nolga aylanuvchi funksiyalar uchun skalyar ko‘paytma quyidagi tartibda aniqlanadi.

$$(v,\omega)=\int_{\Omega} v(x)\omega(x)dx$$

$H=L_2(\Omega)$ gilbert fazosiga ega bo‘lamiz.

H da norma uchun quyidagi belgilash ishlatiladi.

$$\|v\|=(v,v)^{\frac{1}{2}}=(\int_{\Omega} v^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

(2) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi funksiya uchun quydagi operatorni aniqlaymiz.

$$Au=[Au](x)=-\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}), 0<x<l.$$

Kiritilgan boshlang‘ich shartni e’tiborga olib (1) tenglamani, chegaradagi qo‘shimcha shart (2) ni $u(t)\in H$ ni topish uchun differensial-operator tenglama sifatida yozami:

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t), 0<t<T \tag{5}$$

Boshlang‘ich shart (3) quydagi ko‘rinishda yoziladi

$$u(0)=u_0. \tag{6}$$

Shuni qayd etish kerakki, A operator xususiyatlari (4) ga muvofiq aniqlanadi. A operator H da o‘zaroqo‘shma va manfiy emaslik

$$A^*=A\geq 0 \tag{7}$$

O‘zaro qo‘shmalik sharti quydagi tenglikdan kelib chiqadi

$$(A\nu,\omega)=\int_0^1 A\nu(x)\omega(x)dx=\int_0^1 k(x)\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}dx=(\nu,A^*\omega)$$

Bu $\nu(x),\omega(x)$ funksiya $x\in\partial\Omega$ da nolga aylanishini e’tiborga olgan holda hosil qilingan.

$x\in\partial\Omega$ da $\nu(x)=0$ funksiya uchun

$$(A\nu,\omega)=\int_0^1 k(x)(\frac{\partial\nu}{\partial x})^2dx\geq 0$$

ga ega bo‘lamiz va shuning uchun $A\geq 0$ bo‘ladi.

(1), (6) tenglamaning yechimlari oddiy aprior bahoga ega bo‘lamiz. Evalyutsion tenglamalar uchun masalalarni qarashda Gronuollya lemmasi katta ahamiyatga ega. Sodda variantda uning formulirovkasi bilan cheklanamiz.

Lemma 1. Quydagi tengsizlik qanoatlantiruvchi g(t) funksiya uchun

$$\frac{dg}{dt}\leq ag(t)+b(t), t>0,$$

(bu yerda $a=const, b(t)\geq 0,$) quydagi baho to‘g‘ri

$$g(t)\leq\exp\{at\}\left(g(0)+\int_0^t\exp\{-a\theta\}b(\theta)\right), t>0.$$

Teorema 1. (5), (6) masalani yechish uchun quydagi aprior to‘g‘ri

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_0^t \| f(0)\| d\theta, 0 \le t \le T. \quad (8)$$

Isbot. (5) tenglamani u(t) ga skalyar ko‘paytirib, quydagi tenglamaga ega bo‘lamiz

$$(\frac{du}{dt}, u) + (Au, u) = (f, u).$$

00 etiborga olib

$$(\frac{du}{dt}, u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = \|u\|\frac{d}{dt}\|u\|, (f, u) \le \|f\|*\|u\|,$$

ga ega bo‘lamiz.

Bundan esa A operator manfiy emasligini e’tiborga olib quydagi kelib chiqadi

$$\frac{d}{dt}\|u\| \le \|f\|$$

Bu tengsizlikdan esa (8) baho kelib chiqadi.

Natija 1. (5) va (6) masalalar yechimi yagona.

Aytaylik ikkita, ya’ni $u_1(t)$ va $u_2(t)$ yechimlar mavjud bo‘lsin. Ularning ayirmasidan tashkil topgan $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ funksiya $f(t) = 0, 0 < t \le \mathrm{O}$ shartdan (5) tenglamani va birjinsli boshlang‘ich shartni ($u_0 = 0$) qanoatlantiradi.

(8) aprior bahodan barcha $0 < t \le \mathrm{O}$ lar uchun $u(t) = 0$ kelib chiqadi.

Qaralayotgan masalada kirish ma’lumotlari sifatida eng avvalo boshlang‘ich shartni qarash zarur. Bunday holda biz boshlang‘ich shartni turg‘unligi haqida gapiramiz.

Xususan masala yechimini tenglamaning o‘ng tomoniga bog‘liqligini, o‘ng qism bo‘yicha turg‘unlikni tekshirish ma’noga ega.

Endi (8) aprior baho boshlang‘ich shart va o‘ng qism bo‘yicha turg‘unlikni ta’minlanganligi ko‘rsatamiz.

(5), (6) masalani qo‘zg‘aluvchi boshlang‘ich shart va o‘ng qismi bilan qaraymiz.

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), 0 < t \le T. \tag{9}$$

(3) boshlang‘ich shartda quydagi ko‘rinishda qayta yoziladi

$$u(0) = u_0. \tag{10}$$

Natija 2. Aytaylik

$$\left\| u_0 - u_0 \right\| \le \varepsilon, \qquad \left\| f(t) - f(t) \right\| \le \varepsilon, \qquad 0 < t \le T$$

bo‘lsin. Bu yerda $\varepsilon > 0$. U holda

$$\left\| u_0 - u_0 \right\| \le M\varepsilon, \qquad 0 < t \le T$$

bo‘ladi. Bu yerda m=1+T.

Bu (5)-(6) masala yechish o‘ng tomonga va boshlang‘ich shartga uzluksiz bog‘liqligini ko‘rsatadi. $\delta u(t) = u(t) - u(t)$ uchun (5), (6) va (9), (10) lardan quydagicha hosil qilinadi.

$$\frac{d\partial u}{dt} + A\partial u = \partial f(t), \qquad 0 < t \le T \tag{11}$$

$$\partial u(0) = \partial u_0 \tag{12}$$

$$\partial u_0 = u_0 - u_0, \qquad \partial f(t) = f(t) - f(t)$$

(11)-(12) masala yechish uchun quydagi aprior baho to‘g‘ri

$$\left\| \partial u(t) \right\| \le \left\| \partial u_0 \right\| + \int_0^t \left\| \partial f(\theta) \right\| d\theta, \qquad 0 \le t \le T$$

va

$$\left\| \partial u(t) \right\| \le (1 + T)\varepsilon, \qquad 0 \le t \le T$$

bo‘ladi.

Xulosa

Xulosa qilib maqolada matematik fizikaning tayanch nostatsionar tenglamasi sifatida bir o‘lchovli ikkinchi tartibli parabolik tenglama ishtrok etgan. Masala to‘rtburchak sohada ko‘riladi. Berilgan masalaga chegaraviy va boshlang‘ich shartlar qo‘yiladi. Differrensialanuvchi, t bo‘yicha uzluksiz differrensialanuvchiga ega deb hisoblaymiz. Qaralayotgan masalada kirish ma’lumotlari sifatida eng avvalo boshlang‘ich shartni qarash zarur. Bunday holda biz boshlang‘ich shartni turg‘unligi haqida gapiramiz.

Biz bu masalada yechimning yagonaligi va uning kirish ma’lumotlari uzluksiz bog‘likligi bilan cheklanuvchi yechimning mavjudligi masalasini qaraymiz va yechimni olamiz. Bu masalani yechimini topishda bir qancha adabiyotlardan foydalanildi va ular quyida berib o‘tilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А. Об одном методе построения функции Римана для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, “Математика ва информатиканинг долзарб муаммолари” мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материаллари, Фарғона шаҳри, 2019 йил 22-23 май, 78-79.

2. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Задача Коши для ультрагиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами, Узбекско-Российская научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» 24-26 октябрь, Тошкент, 2019, стр. 132-133,

3. Каримов Ш.Т., Комилова. З. Задача Гурса для одного уравнения четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами, ФарДУ. Илмий хабарлар. Научный вестник ФерГУ,№2, 2020 с.3-8,

4. Каримов Ш.Т., Oripov. Sh.A. On a Method for Constructing the Riemann Function for Partial Differential Equations with a Singular Bessel Operator, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1087–1093.

5. Каримов Ш.Т., Орипов.Д. About a method of construction of transmutation operator, Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы

прикладной математики и информационных технологий Аль-Хорезми 2021» 15-17 ноября 2021 г. Фергана,Ташкент, с.123,

6. Каримов Ш.Т., Sergei M. Sitnik. On some generalizations of the properties of the ultidimensional generalized Erdélyi-Kober operator and their applications in Transmutation Operators and Applications, Ed. by V. Kravchenko and S. M. Sitnik, Trends in Mathematics (Springer, 2020), 2020. pp. 85-115. DOI 10.1007/978-3-030-35914-0, 24 б.

7. Каримов Ш.Т., Х.Юлбарсов Задача Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка с сингульярными коэффициентами Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня работников науки Республики Казахстан, посвящкнная 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова, -Алматы,, 2021, с. 156-157. 2 б.

8. Каримов Ш.Т., Х.Юлбарсов Аналог задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Материалы научной конференции “Актуальные проблемы стохастического анализа” посвященный 80-летию академика АН РУз Ш.К.Фарманова, (20-21 февраля) -Тошкент 2021, с. 309-312. 5 б.

9. Каримов Ш.Т., Х.Юлбарсов. Задача Гурса для одного псевдопарабо-лического уравнения третьего порядка с оператором Бесселя. Материалы IX международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова, 12 - 15 сентября, Стерлитамак, 2021 г. С. 5 б.

10. Каримов Ш.Т. An Analog of the Cauchy Problem for the Inhomogeneous Multidimensional Polycaloric Equation Containing the Bessel Operator. Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021, 254(6), стр. 703–717. 15 б.