

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖЕНОВЫХ КОНСТРУКЦИИ

¹ Полатов А.М., ² Одилов Ж.К., ¹ Ниёзов Б.Д.

¹Национальный Университет Узбекистана,

asad3@yandex.ru,

bekzodniyozov1303@gmail.com,

²Каршинский государственный университет,

odilovjahongir1993@gmail.com

В статье приводится вычислительный алгоритм определения напряженного состояния двумерных стержневых металлоконструкций методом конечных элементов (МКЭ). На основе разработанного вычислительного алгоритма и программного обеспечения исследовано влияние конфигурации стержневой конструкции, находящего под действием заданных нагрузок. Приведены значения смещений и напряжений для различных значений высоты крайнего стержня конструкции. Установлено, что наилучшей конфигурацией является конструкция, в которой высота крайнего стержня соответствует половине высоты конструкции.

Ключевые слова: конструкция, стержень, узел, матрица жёсткости, перемещение, напряжение, нагрузка.

Процедура расчёта МКЭ в форме перемещений заключается в следующем. Конструкция, с учетом её геометрии, разбивается на некоторое количество КЭ, которые связаны между собой узловыми точками (узлами), расположенными на их границах. Расчётная схема задачи, смоделированная таким образом совокупностью КЭ, рассматривается как дискретная, нагруженная узловыми

силами, которые статически эквивалентны действующим на элемент распределенным нагрузкам и граничным напряжениям.

При расчёте МКЭ кинематический неопределимых систем наибольшее распространение получила следующая матричная зависимость определения вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат $X^0Y^0Z^0$:

$$\{S_{kons}^0\} = [K_{kons}^0][A]([A]^T [K_{kons}^0][A])^{-1} \{P^0\} = [K_{kons}^0][A]\{Z^0\} \quad (1)$$

где $\{S_k^0\}$ - вектор внутренних узловых сил конструкции, состоящий из блоков (клеток) векторов внутренних узловых сил КЭ $\{S_r^0\}$;

$[K_k^0]$ - квазидиагональная матрица жёсткости конструкции, состоящая из блоков матриц жёсткости КЭ $[K_r^0]$ в общей системе координат;

$[A]$ - матрица соответствий (связи узлов) конструкции, состоящая из блоков матриц соответствий КЭ $[A_r]$;

$\{P^0\}$ - вектор узловой нагрузки конструкции;

$\{Z^0\}$ - вектор узловых перемещений конструкции;

Вектор узловой нагрузки в общей системе координат $\{P^0\}$ формируется из сосредоточенных сил и моментов, приложенных к узлам сопряжения КЭ расчётной схемы конструкции, а также из узловых сил и моментов, которые статически эквивалентны действующим на КЭ распределенным нагрузкам.

Квазидиагональная матрица жёсткости конструкции $[K_k^0]$ представляет собой следующую матрицу:

$$[K_{kons}^0] = \begin{bmatrix} K_1^0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & K_2^0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & K_{n-1}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & K_n^0 \end{bmatrix},$$

где n - число КЭ в расчётной схеме конструкции;

$[K_r^0]$ - матрица жёсткости r -го ($1 < r < n$) КЭ в общей системе координат.

Как отмечалось, матрица $[K_r^0]$ вычисляется с помощью конгруэнтного преобразования:

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r],$$

где

где $[K_r]$ - матрица жёсткости r -го КЭ в местной системе координат XYZ

$[T_r]$ - матрица ортогонального преобразования координат r -го КЭ.

Матрица ортогонального преобразования координат КЭ $[T_r]$ состоит из матриц направляющих косинусов, т. е. из значений косинусов углов между осями местной и общей систем координат.

Матрица $[T_r]$ связывает вектор узловых перемещений КЭ в местной системе координат $\{Z_r\}$ с вектором узловых перемещений КЭ в общей системе координат $\{Z_r^0\}$ следующим образом:

$$\{Z_r\} = [T_r] \{Z_r^0\}$$

Матрица соответствий конструкции $[A]$ содержит топологическую информацию, указывающую адрес, по которому должны быть распределены

элементы матриц жёсткости $[K_r^0]$ всех КЭ на поле матрицы $[K^0]$ жёсткости конструкции:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

где $[A_r]$ - матрица соответствий КЭ, число строк которой равно числу степеней свободы узлов КЭ, а число столбцов равно числу степеней свободы узлов расчётной схемы конструкции.

Матрица соответствий r -го элемента $[A_r]$ - булева матрица (целочисленная, т. е. элементы матрицы принимают только два значения: 0 и 1), которой задается топологическая информация степеней свободы узлов r -го КЭ на поле матрицы жёсткости конструкции. Как отмечалось, строки матрицы - это номера степеней свободы узлов КЭ, а столбцы - это номера степеней свободы узлов конструкции. На пересечении соответствующих номеров строк и столбцов матрицы соответствий КЭ (конструкции) ставится единица, а остальные элементы матрицы нулевые.

Матрица жёсткости конструкции вычисляется по формуле:

$$[K^0] = [A]^T [K^0] [A].$$

Матрица жёсткости конструкции $[K^0]$ содержит зависимые уравнения, определяющие зависимость нагрузки и реакций опор, что не позволяет выполнить решение системы уравнений равновесия задачи, т. е. обращение матрицы жёсткости конструкции. Чтобы обеспечить возможность решения системы уравнений, необходимо в матрице жёсткости $[K^0]$ исключить зависимые уравнения или реализовать условия кинематического закрепления задачи: в виде связей, накладываемых на узловые перемещения и ограничивающих свободу перемещений задачи в пространстве (опоры), и

получить, тем самым, матрицу коэффициентов системы уравнений равновесия $[K_*^0]$. Различные способы реализации условий кинематического закрепления задачи подробно рассмотрены в § 4.2.3.

Таким образом, система разрешающих уравнений равновесия (линейных алгебраических уравнений) задачи может быть представлена в следующем виде:

$$\{Z^0\} = [K_*^0]^{-1} \{P^0\}, \quad (2)$$

что позволяет определить и вектор $\{S_k^0\}$ внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат (1.28).

Согласно положительным направлениям продольных сил N и моментов M нормальные напряжения в балочном пространственном КЭ вычисляются по формуле:

$$\sigma = \mp \frac{N}{F}$$

где F - площадь сечения;

W_y - момент сопротивления сечения относительно оси Y ;

W_z - момент сопротивления сечения относительно оси Z .

Следует отметить, что в МКЭ имеют место следующие преобразования векторов узловых перемещений и узловых сил из местной системы координат XYZ в общую систему $X^0Y^0Z^0$ соответственно (1.33) и наоборот:

$$\begin{aligned} \{Z_r^0\} &= [T_r]^T \{Z_r\}, \\ \{S_r^0\} &= [T_r]^T \{S_r\}, \end{aligned} \quad (3)$$

Тестовая задача

Для тестирования алгоритма решения рассматривается тестовая задача статики произвольной плоской стержневой системы, которая приведена в работе [1]. В ней рассматривается конечно-элементная модель фермы, которая содержит пять узлов и образована семью КЭ плоской фермы. На рис.1

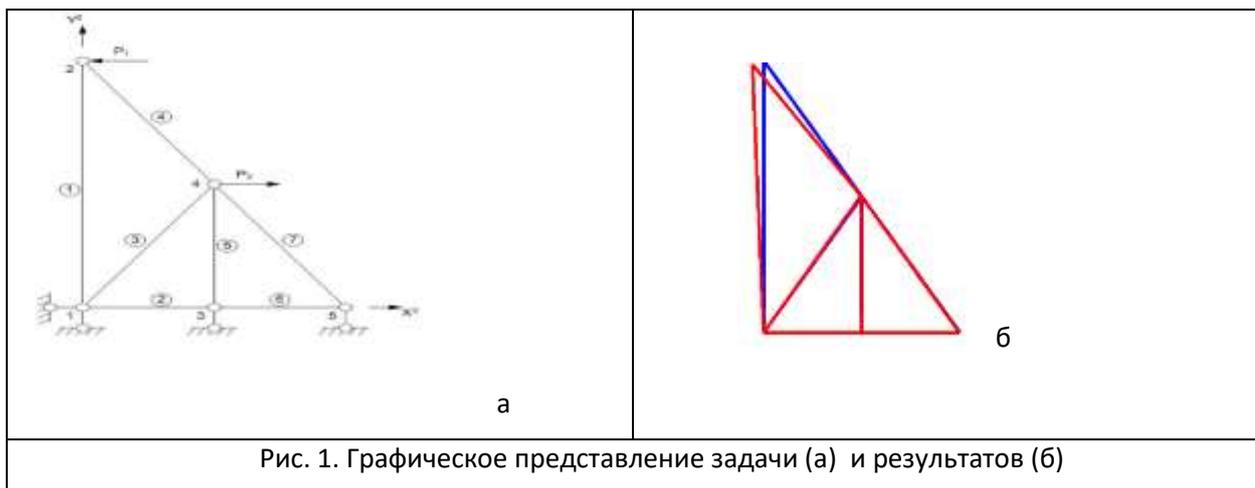
представлена графическая постановка задачи. В узлах 2 и 4 приложены нагрузки P_1 и P_2 . Узел 1 закреплён по обоим направлениям оси координат, а узлы 3 и 5 - только по оси OY.

Исходные данные:

$$P_1 = 70 \text{ кН}, P_2 = 2 \text{ кН}, F_{\text{гор}} = 64 \text{ см}^2, F_{\text{верт}} = 40 \text{ см}^2,$$

$$F_{\text{накл}} = 60 \text{ см}^2, E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$$

Характеристика модели: число узлов- 5 и конечных элементов фермы- 7.



Результаты, полученные в данной статье, соответствуют решениям вышеописанной задачи.

Заключение

На основе разработанного вычислительного алгоритма и программного обеспечения исследовано влияние конфигурации стержневой конструкции, находящего под действием заданных нагрузок. Приведены значения смещений и напряжений для различных значений высоты крайнего стержня конструкции. Установлено, что наилучшей конфигурацией является конструкция, в которой высота крайнего стержня соответствует половине высоты конструкции.

Список литературы

1. Дьяков И. Ф., Чернов С. А., Черный А. Н. Метод конечных элементов в расчётах стержневых систем / - Ульяновск: УлГТУ, 2010. - 133 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Белостоцкий А.М. Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем "сооружение - основание - водохранилище" с учетом нелинейных эффектов открытия - закрытия швов и макротрещин. Москва, 1998. -368 с.
4. Вершинский А.В. Расчет стержневых систем методом конечных элементов. М.: МВТУ, 1983. – 48 с.
5. Синельщиков А. В., Панасенко Н. Н. Сравнительный анализ расчетно-динамических моделей портовых кранов на остове одно и двумерных конечных элементов. Вестник АГТУ. Сер.: Морская техника и технология. 2019. № 2.
DOI: <https://doi.org/10.24143/2073-1574-2019-2-127-144>
6. Вершинский А.В. Технологичность и несущая способность крановых металлоконструкций. М.: Машиностроение, 1984. – 167 с.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. – 428 с.
8. Polatov A. M., Ikramov A.M., Razmukhamedov D. Finite element modeling of multiplyconnected three-dimensional areas. *Advances in Computational Design*, 2020, Vol. 5, No. 3, p. 277-289. DOI: <https://doi.org/10.12989/acd.2020.5.3.277>
9. Polatov A. M., Khaldjigitov A. A., Ikramov A. M. Algorithm of solving the problem of small elastoplastic deformation of fiber composites by FEM. *Advances in Computational Design*, 2020, Vol. 5, No. 3, p. 305-321. DOI: <https://doi.org/10.12989/acd.2020.5.3.305>