BANAX FAZOSIDA OSHKORMAS VA TESKARI FUNKSIYA

Shoimov Baxodir Sayfullo o‘g‘li
Iqtisodiyot va Pedagogika Universiteti
Umummetodologik fanlari kafedrasi dotsenti

Bozorov Murot Nashvandovich
Iqtisodiyot va Pedagogika Universiteti
Umummetodologik fanlari kafedrasi dotsenti
e-mail: boxodir1@bk.ru

Annotatsiya: Ushbu maqolada differensial tenglamalar uchun ba’zi chegaviy masalalar yechimlarining mavjudligi oshkormas va teskari funksiya to‘g‘risidagi teoremalardan foydalanib isbotlangan.

Kalit so‘zlar: Normallangan fazo, Banax fazosi, to‘g‘ri yig‘indi, norma, chiziqli operator, chiziqli gomeomorfizm, biyektiv akslantirish. Freshe ma’nosidagi hosila.

НЕЯВНАЯ И ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Шоимова Баходир Сайфулло угли
Университет Экономики и Педагогики
Доцент кафедры общеметодических наук

Бозорова Мурот Нашвандович
Университет Экономики и Педагогики
Доцент кафедры общеметодических наук
e-mail: boxodir1@bk.ru

Аннотация: В данной статье с помощью теорем о неявных и обратной функциях, доказывается существование решений некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Нормализованное пространство, Банахово пространство, правильная сумма, норма, линейный оператор, объективное отражение, линейный гомеоморфизм, Производное значение Фреше.

AN IMPLICIT AND INVERSE FUNCTION IN A BANACH SPACE

Shoimov Baxodir Sayfullo o'g'li

University of Economics and Pedagogy

Associate Professor of the Department of General Methodological Sciences

Bozorov Murot Nashvandovich

University of Economics and Pedagogy

Associate Professor of the Department of General Methodological Sciences

e-mail: boxodir1@bk.ru

Annotation: In this article, the existence of solutions of some boundary value problems for differential equations is proved using the theorems about the implicit and inverse functions.

Key words: Normalized space, Banach space, regular sum, norm, linear operator, objective reflection, linear homeomorphism, Frechet derivative value.

Aytaylik, $X, Y-$ chiziqli normalangan fazolar bo'lsin. Ushbu

$$X \times Y = \{(x, y) | \, x \in X, y \in Y\}$$

to'g'ri ko'paytma tabiiy ravishda chiziqlilashtiriladi:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, $\lambda -$ skalyar.

Ravshanki, bu amallar bilan birgalikda $X \times Y$ chiziqli fazoni tashkil etadi. Bu fazoda nol-vektor $0=(0;0)$ dan (x,y) ga qarama-qarshi vektor $-(x,y)=(-1)\cdot(x,y)$ dan iborat. (x,y) vektorni $(x,y)=(x,0)+(0,y)$ ko‘rinishda ifodalaylik va $(x,0)$ vektorni x bilan, $(0,y)$ vektorni esa y bilan tenglashtirib, $X \times Y = X \oplus Y$ (to‘g‘ri yig‘indi) deb tushunushimiz mumkin.

$X \times Y$ chiziqli fazoda norma quyidagicha kiritiladi:

$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ (aniqroq: $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$).

Bunda, agar X va Y lar Banax fazosi bo‘lsa, $X \times Y$ ham Banax fazosi bo‘ladi.

$A: X\times Y \to Z$ ($Z-$chiziqli fazo) chiziqli operatorni

$A_X(x) = A(x,0)$ va $A_Y(y) = A(0,y)$

deb quyidagicha chiziqli operatorlar yig‘indisi sifatida tasvirlash mumkin:

$$A(x,y) = A_X(x) + A_Y(y). \qquad (1)$$

Aksincha, $A_X: X\to Z$ va $A_Y: Y \to Z$ chiziqli operatorlar juftligi (1) formulaga ko‘ra $A: X\times Y \to Z, A=(A_X, A_Y)$ chiziqli operatorni aniqlaydi.

$F: X\times Y \to Z$ operator (akslantirish) dan $x_0 \in X$ ni tayinlab $F(x_0,\circ): Y \to Z$ operatorni, $y_0 \in Y$ ni tayinlab esa $F(\circ, y_0): X \to Z$ operatorni tuzishimiz va $F'_y(x_0,y_0) \in L(Y;Z)$ va $F'_x(x_0,y_0)\in L(X;Z)$ hosilalarni (aniqroq: xususiy hosilalarni) aniqlashimiz mumkin.

Faraz qilaylik, $F'_x(x,y)$ va $F'_y(x,y)$ hosilalar $(x_0,y_0)\in X\times Y$ nuqtaning biror atrofida mavjud bo‘lsin. U holda quyidagi baholash o‘rinli

$$\|F(x_0+h_1, y_0+h_2) - F(x_0,y_0) - F'_x(x_0,y_0)h_1 - F'_y(x_0,y_0)h_2\| \le$$

$$\le \sup_{0<\theta,\theta_1<1} \|F'_x(x_0+\theta h_1, y_0+\theta_1 h_2) - F'_x(x_0,y_0)\|\cdot\|h_1\| +$$

$$+ \sup_{0<\theta,\theta_1<1} \|F'_y(x_0+\theta h_1, y_0+\theta_1 h_2) - F'_y(x_0,y_0)\|\cdot\|h_2\|.$$

Bu baholash chekli orttirmalar formula [1] bevosita kelib chiqadi.

Banax fazosida oshkormas va teskari funksiya haqidagi teoremalar va ularning ba’zi tatbiqlari

Oshkormas va teskari funksiya haqidagi teoremalarni Banax fazolarida isbotlaymiz va ularning chegaraviy masalalarni yechishga tatbiq etamiz.

$X,Y,Z-$ Banax fazolari bo‘lsin. Ushbu

$S_\alpha(x_0)=\{x\in X|\,\|x-x_0\|<\alpha\}$, $S_\beta(y_0)=\{y\in Y|\,\|y-y_0\|<\beta\}$, $W=S_\alpha(x_0)\times S_\beta(y_0)$ $(x_0\in X, y_0\in Y)$ belgilashlarni kiritaylik. $F:W\to Z$ akslantirishni qaraylik. Biz $F(x,y)=0$ tenglamani y ga nisbatan yechish bilan shug‘ullanamiz.

Quyidagi A- shartlar qanoatlangan deb hisoblaymiz.

A shartlar**:**

1^0. $F(x_0,y_0)=0$;

2^0. $F:S_\alpha(x_0)\times S_\beta(y_0)\to Z$ akslantirish uzluksiz, $F\in C\left(S_\alpha(x_0)\times S_\beta(y_0);Z\right)$;

3^0. Tayinlangan ixtiyoriy $x\in S_\alpha(x_0)$ uchun $F(x,\circ):S_\beta(y_0)\to Z$ akslantirish $S_\beta(y_0)$ da Freshe ma’nosidagi $D_yF(x,y)$ $\left(\in L(S_\beta(y_0);Z)\right)$ hosilaga (differensialga) ega;

4^0. $(x,y)\mapsto D_yF(x,y)$ akslantirish $W=S_\alpha(x_0)\times S_\beta(y_0)$ ni $L(S_\beta(y_0);Z)$ ga uzluksiz akslantiradi.

Teorema (oshkormas funksiya haqidagi). *Faraz qilaylik, $F:W\to Z$ akslantirish A shartlarni qanoatlantirsin. Agar $D_yF(x_0,y_0)-$ chiziqli gomeomorfizm, ya’ni $D_yF(x_0,y_0)\in L(S_\beta(y_0);Z)$ va $\left[D_yF(x_0,y_0)\right]^{-1}\in L(Z;S_\beta(y_0))$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning X dagi shunday U atrofi va y_0 nuqtaning Y dagi shunday V atrofi topiladiki, $\forall x\in U$ uchun y ga nisbatan $F(x,y)=0$ tenglamaning yagona $y=f(x)\in V$ yechimi mavjud bo‘ladi. Bunda $f:U\to V$ akslantirish uzluksiz.*

Isboti. Ushbu

$$G(x,y)=y-D_y^{-1}F(x_0,y_0)\cdot F(x,y)$$

akslantirishni qaraylik. Ravshanki, $F(x,y)=0$ tenglamaning yechimi $G(x,y)=y$ tenglamaning yechimidir va aksincha. Oxirgi tenglamadagi $G(x,y)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $G(x_0, y_0) = y_0$ (**1^0** ga ko‘ra)

2. $G(x,y)$ va $D_y G(x,y)$ lar (x,y) lar bo‘yicha uzluksiz (**2^0, 3^0, 4^0** ga ko‘ra).

3. $D_y G(x_0, y_0) = 0$ ($D_y G(x,y) = I - D_y^{-1} F(x_0, y_0) \cdot D_y F(x,y)$, $I-$ birlik akslantirish).

$D_y G(x,y)$ uzluksiz bo‘lganligi uchun y_0 nuqtaning shunday $V_r(y_0) = \{y \in Y \mid \|y - y_0\| \le r\} \subset \{y \in Y \mid \|y - y_0\| < \beta\}$ atrofi mavjudki, ixtiyoriy $\{y_1, y_2\} \subset V_r(y_0)$ va x_0 ga yaqin x lar uchun (chekli orttirmalar formulasi):

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| \le \left(\sup_{0 \le t \le 1} \|D_y G(x, y_1 + t(y_2 - y_1))\| \right) \cdot \|y_1 - y_2\| \le \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

(1)

bo‘ladi. G uzluksiz bo‘lganligi uchun esa x_0 nuqtaning shunday yetarlicha kichik $U_\delta(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \le \delta\} \subset \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \alpha\}$ atrofi topiladiki, $x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$\|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\| < \frac{r}{2}. \qquad (2)$$

bo‘ladi. $x_0$ning va $y_0$ning topilgan shu atroflari biz izlayotgan atroflardir: $U = U_\delta(x_0), V = V_r(y_0)$.

Shu tasdiqni isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in U, y \in V$ lar uchun (1) va (2) ga ko‘ra

$$\|G(x,y) - y_0\| = \|G(x,y) - G(x_0, y_0)\| \le \|G(x,y) - G(x, y_0)\| + \|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\|y - y_0\| + \frac{r}{2} \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \qquad (3)$$

M bilan

$$f \in C(U;Y),\ f(x_0) = y_0,\ \|f(x) - y_0\| \le r,\ \sup_{x \in U} \|f(x)\| < +\infty$$

shartlarini qanoatlantiradigan akslantirishlar to‘plamini belgilaylik. M yopiq to‘plamdir. Chunki, agar f uning limit nuqtasi bo‘lsa, M to‘plamni elementlaridan f ga yaqinlashuvchi $f_1, f_2, \ldots$ ketma-ketlik topish mumkin. U holda f ham $C(U;Y)$

sinfga tegishli bo‘ladi. Buni ko‘rsatish uchun $\{x_1, x_2\} \subset U$ ga ko‘ra $\| f(x_1) - f(x_2) \|$ ifodani baholashimiz kerak. Shunday $n \in N$ nomer topish mumkinki, uning uchun

$$\| f_n(x_1) - f(x_1) \| < \frac{\varepsilon}{3}, \| f_n(x_2) - f(x_2) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

bo‘ladi. Bu yerda $\varepsilon -$ oldindan berilgan ixtiyoriy musbat son. f_n ning uzluksiz bo‘lganligi uchun topilgan $n \in N$ nomer va ε ga bog‘liq ravishda x_1 nuqtaning U dagi shunday $\eta -$ atrofini topish mumkinki, $\| x_1 - x_2 \| < \eta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x_2 larda

$$\| f_n(x_1) - f_n(x_2) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

bo‘ladi. U holda x_1 nuqtaning shu $\eta -$ atrofi uchun

$$\| f(x_1) - f(x_2) \| \le \| f(x_1) - f_n(x_1) \| + \| f(x_2) - f_n(x_2) \| + \| f_n(x_1) - f(x_2) \| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Shuningdek, $f(x_0) = y_0$ bo‘ladi, chunki

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} y_0 = y_0 = f(x_0).$$

O‘z navbatida $\forall x \in U$ uchun $\| f(x) - y_0 \| < r$, chunki, agar $x \in U$ bo‘lsa,

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists n_0;\ \forall n > n_0;\ \| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon,$$

ya’ni

$$\| f(x) - y_0 \| \le \| f(x) - f_n(x) \| + \| f_n(x) - y_0 \| < \varepsilon + r.$$

ε ning ixtiyoriyligidan $\| f(x) - y_0 \| \le r$ ligi kelib chiqadi. Endi $\| f(x) \| \le y_0 + r$ bo‘lganligi uchun $\sup\limits_{x \in U} \| f(x) \| < +\infty$ bo‘ladi. Demak, $f \in M$

M to‘plam Banax fazosining yopiq qism to‘plami bo‘lganligi uchun M ham Banax fazosi bo‘ladi va unda

$$f(x) = G(x, f(x))$$

tenglama aniqlanadi. $G(x, y)$ funksiyaning xossalari va (1), (2), (3) dan $G: M \to M$ ning qisqartirib akslantirish ekanligi kelib chiqadi. Banaxning qisqartirib aks ettirish printsipiga ko‘ra yagona $f \in M$ element mavjudki, $\forall x \in U \ \ f(x) = G(x, f(x))$ bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Eslatma. Agar teoremani shartlari bilan birgalikda F akslantirish n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, topilgan $f: U \to V$ akslantirish ham n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘ladi.

Masala 1. Quyidagi nochiziqli chegaraviy masalani qaraylik:

$$y'' + \lambda f(t, y) = 0, \quad 0 < t < \pi, \; y(0) = y(\pi) = 0. \qquad (4)$$

Biz ko‘rsatamizki, agar f uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, nolga yaqin $\lambda \in R$ lar uchun bu masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

Ushbu

$$X = R, \quad Y = \{ f : [0;\pi] \to R \mid f \in C^2[0;\pi] \wedge f(0) = f(\pi) = 0 \}, \quad Z = C([0;\pi])$$

fazolarni kiritaylik. Bu fazolar o‘zlarining odatiy normalariga ega deb hisoblanadi. $F : X \times Y \to Z$ akslantirishni

$$F(\lambda, y) = y'' + \lambda f(t, y)$$

formula bilan aniqlaylik. F uzluksiz va $F(0,0) = 0$ ya’ni $\lambda = 0$ da (4) masala $y \equiv 0$ trivial yechimga ega. Shuningdek, agar $y_0 \in Y$ bo‘lsa,

$$D_y F(\lambda, y_0)(z) = z'' + \lambda \frac{\partial f(t, y_0)}{\partial y} z,$$

ya’ni

$$(\lambda, y) \mapsto D_y F(\lambda, y)$$

akslantirish uzluksiz.

Endi ushbu $T = D_y F(0,0) : Y \to Z$ chiziqli akslantirishni qaraylik. Biz shu akslantirishni chiziqli gomeomorfizm ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Ma’lumki [4], har bir $h \in C([0;\pi])$ uchun

$$v'' = h(t), 0 < t < \pi, v(0) = v(\pi) = 0$$

chegaraviy masala yagona yechimga ega va u

$$v(t)=\int_0^{\pi} Q(t,s)h(s)ds,\quad Q(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}(\pi-t)s,\,0\le s\le t\\ -\dfrac{1}{\pi}t(\pi-s),\,t\le s\le \pi\end{cases} \qquad (5)$$

formula bilan beriladi. (5) munosabatdan T^{-1} ning in'yektiv va uzluksizligi kelib chiqadi, chunki

$$\|v\|=\|T^{-1}h\|\le c\|h\|,\quad c-const.$$

Demak, oshkormas funksiya haqidagi teoremani barcha shartlari bajariladi. Shuning uchun nolning yetarlicha kichik atrofidagi $\lambda\in R$ larda (4) masala yagona $y\in Y$ yechimga ega.

Endi teskari funksiya to'g'risidagi funksiyani keltiraylik.

Teorema (teskari funksiya to'g'risidagi). *Aytaylik, X,°Y – Banax fazolari, $U-a\in X$ nuqtaning ochiq arofi bo'lsin. $f:U\to Y$ akslantirish uzluksiz differensiallanuvchi va $Df(a):X\to Y-$chiziqli gomeomorfizm ham bo'lsin. U holda a nuqtaning shunday U' atrofi, $f(a)$ ning shunday V atrofi mavjud va bir qiymatli aniqlanadigan shunday g funksiya topiladiki, ular uchun*

a) $f:U'\to V-$biyektiv akslantirish,

b) $g:V\to U'-$biyektiv akslantirish va $\forall x\in U'$ $g\left(f(x)\right)=x$,

v) $g\in C^1\left(V;U'\right)$ va $Dg\left(f(a)\right)=D^{-1}f(a)$

xossalar o'rinli bo'ladi.

Teskari funksiya haqidagi bu teorema oshkormas funksiya haqidagi teoremadan standart usulda keltirib chiqariladi.

Masala 2. Ushbu

$$x''+\lambda x+f(t,x)=g,\quad x(0)=x(2\pi), x'(0)=x'(2\pi) \qquad (6)$$

chegaraviy masalani qaraylik. Bu yerda $g-2\pi$ davrga ega bo'lgan uzluksiz funksiya va $\lambda\in R-$parametr. Quyidagi fazolarni qaraylik:

$$X=C^2\left(\left[0;2\pi\right];R\right)\cap\left\{x\,|\,x(0)=x(2\pi)\wedge x'(0)=x'(2\pi)\right\},\quad Y=C\left(\left[0;2\pi\right];R\right).$$

Bu fazolarda odatdagicha normalar kiritilgan deb hisoblaymiz.

Jumla. Agar f uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda ba’zi λ lar uchun barcha g larda (6) masala yagona yechimga ega.

Isboti. Aytaylik $F:X\to Y$ funksiya

$$F(x)=x''+\lambda x+f(t,x)$$

formula bilan berilgan bo‘lsin. Tushunarlki, $DF(x)h=h''(t)+\lambda h(t)+f'_x(t,x(t))h(t)$ Ushbu

$$x\mapsto DF(x)\in L\left(X;Y\right)$$

akslantirish uzluksiz, ya’ni F akslantirish C^1 sinfga tegishli. Differensial tenglamalar nazariyasidan ma’lumki [4],

$$x''+\lambda x=h$$

tenglama $\lambda\neq n^2, n=1,2,\ldots$ bo‘lganda har bir 2π davrli uzluksiz h funksiya uchun 2π davrga ega bo‘lgan yagona yechimga ega va $\|x\|\leq C\|h\|, C-$ faqat λ ga bog‘liq o‘zgarmas. Demak, $DF(0)-X$ ni Y ga akslantiruvchi chiziqli gomeomorfizm. Teorema 2 ga ko‘ra har bir $g\in Y$ va berilgan $\lambda\neq n^2$ uchun (6) chegaraviy masala yagona yechimga ega.

Yana bir chegaraviy masala qaraylik.

$$y''+\lambda f\left(t,y,y'\right)=0,\quad y(0)=0,\ y(\pi)=0 \qquad (7)$$

Bu yerda $y=y(t)-$ noma’lum haqiqiy funksiya, $\lambda-$ haqiqiy parametr, $f(t,y,y')-$ berilgan funksiya; $f(\circ,\circ,\circ)\in C^2([0;\pi]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$ deb faraz qilamiz.

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. (7) chegaraviy masala $\lambda=0$ nuqtaning biror atrofidagi har qanday λ uchun yagona yechimga ega bo‘ladi.

Isboti. $\lambda=0$ da chegaraviy masala $y\equiv0$ trivial yechimga ega. Quyidagi normalangan chiziqli fazolarni kiritaylik:

$$X=R,\quad Y=\left\{y\in C^2([0;\pi],\mathbf{R})\,|\,y(0)=y(\pi)=0\right\},\quad Z=C([0;\pi],\mathbf{R}).$$

Bu fazolar odatdagidek normalangan deb qaraladi. Quyidagi akslantirishni qaraylik:

$$F: X\times Y\to Z,\ F(\lambda, y(t)) = y''(t)+\lambda f(t, y(t), y'(t)).$$

Ravshanki, F uzluksiz va $F(0,0)=0$. Shuningdek, agar $y_0\in Y$ bo‘lsa,

$$D_y F(\lambda, y_0)(z) = z'' + \lambda\frac{\partial f(t, y_0, y_0')}{\partial y}z + \lambda\frac{\partial f(t, y_0, y_0')}{\partial y'}z',$$

ya’ni

$$(\lambda, y)\mapsto D_y F(\lambda, y)$$

akslantirish uzluksiz. Endi ushbu $T = D_y F(0,0): X\times Y\to Z$ chiziqli akslantirishni qaraylik. Bu akslantirishning chiziqli gomeomorfizm ekanligini ko‘rsataylik. Ma’lumki [4], har qanady $h\in C([0;\pi])$ uchun

$$v'' = h(t),\ 0<t<\pi,\ v(0)=v(\pi)=0 \qquad (8)$$

chegaraviy masala yagona yechimga ega va u

$$v(t)=\int_0^{\pi} G(t,s)h(s)ds,\quad G(t,s)=\begin{cases} -\frac{1}{\pi}(\pi-t)s, & 0\le s\le t\\ -\frac{1}{\pi}t(\pi-s), & t\le s\le \pi\end{cases} \qquad (9)$$

formula bilan beriladi. (9) munosabatdan T^{-1}ning in’yektiv va uzluksizligi kelib chiqadi, chunki

$$\|v\| = \|T^{-1}h\| \le c\|h\|,\quad c=\text{const}.$$

Demak, oshkormas funksiya haqidagi teoremaning barcha shartlari bajariladi. Shuning uchun nolga yetarlicha yaqin $\lambda\in R$ larda (7) chegaraviy masala yagona $y\in Y$ yechimga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.М.: Мир, 1970. – 720 с.

2. Рахматуллаева Н. А Локальные и нелокальные задачи для параболо – гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа. //канд. диссертация. Ташкент. 2011. 96. стр.

3.Шоимов Б. С Единственность решение нелокальной задачи для уравнения параболо – гиперболического типа в области с отходом от характеристики . // “Актуальные вопросы анализа” Қарши. 2016. С. 198 – 200.

4.Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

5. Shoimov. B.S. Parabolik–giperbolik tipdagi tenglamalar uchun xarakteristikadan siljigan chiziqlarni o‘z ichiga olgan sohalarda chegaraviy masala.// Namangan Davlat Universitetining ilmiy axborotnomasi 2022-yil 6-son [48-54].

6. Shoimov B.S, Jamolov Sh. Singulyar koeffitsientga ega bo‘lgan giperbolik tipdagi tenglama uchun koshi masalasi.// Buxoro Davlat Universiteti ilmiy axborotnomasi 2023-yil 2-son [65- 70].

7. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционалного анализа и теории операторов. – М.:Мир, 1983.- 432 с.