ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СТАТИСТИК ФИШЕРА

Ассистент **Саидов Мансуржон Иномжонович,**
Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий.

Аннотация: *В работе использована представление для членов вариационного ряда составленного из равномерного распределения на отрезке, доказана центральная предельная теорема для центрированной и не центрированной статистик Фишера и скорость сходимости в этих предельных теоремах.*

Ключовая слова: *Вариационного ряда, центральная предельная теорема, случайные величины, распределения, статистика.*

В работе используя представлением для членов вариационного ряда составленного из равномерного распределения на отрезке $[0;1]$ (см. [1]) доказана центральная предельная теорема для центрированной и не центрированной статистик Фишера и скорость сходимости в этих предельных теоремах.

Пусть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ выборка объёма n из равномерного распределения на $[0;1]$ и

$$u_{1,n} < u_{2,n} < \ldots < u_{k,n} < \ldots < u_{n,n}$$

соответствующий ей вариационной ряд.

Известно, что для каждого фиксированного k $(1 \le k \le n)$ имеет место

$$u_{k,n} \overset{d}{=} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}{z_1 + z_2 + \ldots + z_{n+1}}, \qquad (1)$$

где $z_1, z_2, \ldots$ независимые стандартные экспоненциальные одинаково распределенных случайных величин, “d” означает одинаково распределённость случайных величин ξ и η.

Статистика
$$F = \frac{n-s}{r} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2r} \xi_i^2}{\sum_{i=1}^{2(n-s)} \eta_i^2} \qquad (2)$$

называет статистикой Фишера, где ξ_i, η_i независимые стандартно нормально распределенные случайные величины.

Определение. $\xi \in N(a, \sigma)$ означает, что случайная величина ξ распределена нормально с параметрами a и $\sigma > 0$. Обозначим через $\overline{F}$,

$$\overline{F} = \frac{\sum_{i=1}^{2r} \xi_i^2}{\sum_{i=1}^{2(n-s)} \eta_i^2} \qquad (3)$$

В статье доказаны следующие теоремы:

Теорема: 1. Существует абсолютная константа C такая, что

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{\overline{F} - \frac{r}{n-s}}{\sqrt{\frac{r(n-s+r)}{(n-s)^3}}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \le C\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{n-s}} \right) \qquad (4)$$

Теорема: 2. Существует абсолютная константа C такая, что

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{F-1}{\sqrt{\frac{r(n-s+r)}{(n-s)}}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \le C\left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{n-s}} \right) \qquad (5)$$

Здесь $\Phi(x)$ - стандартная нормальная распределения, а С –абсолютная постоянная, причем $C + C = C,\ C \cdot C = C$.

Докажем один из теорем (например Теорема 1), а вторая доказывается аналогично.

<u>**Доказательство теоремы**</u> 1. Предельная теорема для F - распределение Фишера. Величина

$$\overline{F} = \frac{n-s}{r} \cdot F$$

имеет нецентрированное распределение Фишера, где

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{2r} \xi_i^2}{\sum_{i=1}^{2(n-s)} \eta_i^2},$$

где $\xi_i, \ \eta_i \ \in N(0;1)$

Введем обозначения

$$y_i = \xi_i^2; \qquad z_i = \eta_i^2,$$

тогда в силу представление (1) из [1]

$$F = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_r}{z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-s}}$$

или $F = \dfrac{S_r}{\hat{S}_{n-s}}$, где

$$S_r = y_1 + y_2 + \ldots + y_r \qquad \hat{S}_{n-s} = z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-s}$$

и S_r, $\hat{S}_{n-s}$ независимы. Представим F в виде

$$F = \frac{S_r}{\hat{S}_{n-s}} = \frac{S_r - ES_r + r}{\hat{S}_{n-s} - E\hat{S}_{n-s} + (n-s)} = \frac{r}{n-s}\left(1 + \frac{S_r - ES_r}{r}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\hat{S}_{n-s} - E\hat{S}_{n-s}}{n-s}\right)} =$$

$$= \frac{r}{n-s}\left(1 + \frac{\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_z}{r}\right)\left(1 - \frac{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \ldots + \tilde{z}_{n-s}}{n-s} + \left(\frac{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \ldots + \tilde{z}_{n-s}}{n-s}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{r}{n-s}\left(1 + \frac{\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_r}{r} - \frac{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \ldots + \tilde{z}_{n-s}}{n-s} + O(\ldots)^2\right);$$

$$F - \frac{r}{n-s} = \frac{r}{n-s}\left(1 + \frac{\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_r}{r} - \frac{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \ldots + \tilde{z}_{n-s}}{n-s} + O(\ldots)^2\right)$$

$$D\left(F - \frac{r}{n-s}\right) \sim \frac{r^2}{(n-s)^2} \cdot \frac{n-s+r}{r(n-s)} = \frac{r(n-s+r)}{(n-s)^3}$$

Следовательно согласно центральной предельной теореме

$$\left(F - \frac{r}{n-s}\right)\sqrt{\frac{(n-s)^3}{r(n-s+r)}} \in N(0,1)$$

или если ввести обозначения

$$A = \frac{r}{n-s}; \qquad B = \sqrt{\frac{(n-s)^{-3}}{r^{-1}(n-s+r)^{-1}}},$$

то $\left(\frac{F-A}{B}\right) \in N(0,1)$.

Рассмотрим функцией распределения F

$$P(F<x)=P(S_r<\hat{S}_{n-s})=P(S_r-x\hat{S}_{n-s}<0\}=P(\sum<0)=P\left\{\frac{\sum-E\sum}{\sqrt{D\sum}}-\frac{E\sum}{\sqrt{D\sum}}\right\},$$

где $\sum=S_r=x\hat{S}_{n-s}$.

Далее,

$$E\sum=rEy_1^2-x(n-s) \qquad Ez_1^2=r-x(n-s)$$

Так как

$$Ez_1^2=Ey_1^2=Dy_1^2+(Ey_1)^2=Dy_1=1, \quad Dy_1^2=Ey_1^4-(Ey_1^2)^2=Ey_1^4-1=2-1=1,$$

$$Ey_1^4=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^4e^{-\frac{ч^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^3e^{-x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}2^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{\frac{3}{2}}e^{-y}dy=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2.$$

Таким образом,

$$D\sum=rDy_1^2+x^2(n-s)Dz_1^2=r+x^2(n-s).$$

Следовательно,

$$P(F<x)=P\left\{\frac{\sum-E\sum}{\sqrt{D\sum}}<\frac{x(n-s)-r}{\sqrt{r+x^2(n-s)}}\right\}$$

Значит

$$\sup_x\left|P\{F<x\}-\Phi\left(\frac{x(n-s)-r}{\sqrt{r+x^2(n-s)}}\right)\right|\le\frac{\Gamma_{3n}}{[r+x^2(n-s)]^{\frac{3}{2}}}\le$$

$$\le C\frac{r+|x|^3(n-s)}{[r+x^2(n-s)]^{\frac{3}{2}}}\le\frac{C(r+|x|^3(n-s))}{r^{\frac{3}{2}}+|x|^3(n-s)^{\frac{3}{2}}}\le C\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{n-s}}\right),$$

И теперь вместо x надо взять $xB+A$, где

$$A=\frac{r}{n-s}, \qquad B=\frac{(n-s+r)^2}{(n-s)^3}, \qquad (xB+A)(n-s)-r=xB(n-s)=x\sqrt{\frac{r(n-s+r)}{n-s}}$$

$$r+(Xb+A)^2(n-s)=r+A^2(n-s)+x^2B^2(n-s)+2AB(n-s)x=$$

$$=r+\frac{r^2}{n-s}+x^2\frac{r(n-s+r)}{(n-s)^2}+2xr\sqrt{\frac{r(n-s+r)}{(n-s)^3}}=\frac{r(n-s+r)}{n-s}+x^2\frac{r(n-s+r)}{(n-s)^2}+2x\sqrt{\frac{r^3(n-s+r)}{(n-s)^3}}$$

Подсчитаем
$$\Phi\left(\frac{(xB+A)(n-s)-r}{\sqrt{r+(xB+A)^2(n-s)}}\right)=\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n-s}+2x\sqrt{\frac{r^3(n-s+r)}{(n-s)^3}}\cdot\frac{n-s}{r(n-s+r)}}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n-s}+2x\sqrt{\frac{r}{(n-s)(n-s+r)}}}}\right).$$

Рассмотрим отдельно случай например $x \le Cn^{\frac{1}{4}}$ u $x > Cn^{\frac{1}{2}}$ и можно показать, что

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n-s}+2x\sqrt{\frac{r}{(n-s)(n-s+r)}}}}\right)=\Phi\left(x\left(1-\frac{x^2}{2(n-s)}-x\sqrt{\frac{r}{(n-s)(n-s+r)}}\right)+\dots\right)=$$

$$=\Phi\left(x-x^2\sqrt{\frac{r}{(n-s)(n-s+r)}}+\dots\right)=\Phi(x)+O\left(\sqrt{\frac{r}{(n-s)(n-s+r)}}\right)$$

и следовательно

$$\sup_x\left|P\left(\frac{F-A}{B}<x\right)-\Phi(x)\right|\le C\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{n-s}}+\sqrt{\frac{r}{(n-s)(n-s+r)}}\right)\le C\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{n-s}}\right)$$

Теорема доказана.

Замечание, Аналогичный результат можно получать для F величины, имеющей центрированное распределение Фишера.

$$\sup_x\left|P\left(\frac{F-1}{\sqrt{\frac{n-s+r}{r(n-s)}}}<x\right)-\Phi(x)\right|\le C\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{n-s}}\right)$$

Литература:

1. Tolipov, N., Xudoynazarov, Q., & Munavarjonov, S. (2023). ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУШАРЕ. Research and implementation.
2. Nasriddinov, O., Maniyozov, O., & Bozorqulov, A. (2023). XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING UMUMIY YECHIMNI TOPISHNING XARAKTERISTIKALAR USULI. Research and implementation.