СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА ДВУХМЕРНОЕ РЕШЕТКЕ

Мардиев Азамат Шакар угли
Национальные исследовательский университет “Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства”
herr.azamat7@gmail.com

Аннотация:*Рассматривается система произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на узел), взаимодействующих с помощью выбранного потенциала притяжения. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов* $h(k)$ *от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса* $k \in T^2$ $(T^2 -$ двух*мерный тор) зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых левее существенного спектра существует многократное собственное значение оператора.*

Ключевые слова: *двухчастичный гамильтониан на двухмерное решетке, собственное значение, многократное собственное значение.*

Abstract:*We consider a system of arbitrary quantum particles on a one-dimensional lattice with special dispersion functions (describing the transfer of a particle from site to site) interacting with the help of a chosen attraction potential. The dependence of the number of eigenvalues of a family of operators* $h(k)$ *on the particle interaction energy and the total quasi-momentum* $k \in T^2$ $(T^2 -$ *two-dimensional torus) depending on the interaction energy of particles, conditions are found under which a multiple eigenvalue of the operator exists to the left of the essential spectrum.*

Keywords: *two-particle Hamiltonian on a two-dimensional lattice, eigenvalue, multiple eigenvalues.*

ВВЕДЕНИЕ

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс так, что одночастичные "связанные состояния" суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса) [1]. На решетке "выделению центра масс" системы отвечает реализация гамильтониана как "расслоенного оператора т. е. "прямого интеграла" семейства операторов $h(k), k \in T^2$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k \in T^2$ (T^2- двухмерный тор) [2, 3].

Решетчатые двухчастичные гамильтонианы исследованы в работах [4, 5]. В работе [4] показано появление уровней связанных состояний, отстоящих от непрерывного спектра на определенном расстоянии, при некоторых значениях полного квазиимпульса системы. Спектральные свойства двухчастичное оператора, зависящие от полного квазиимпульса, изучены в [5].

В работе [3] доказано, что в случае, когда оператор $h(0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае существенного спектра, дискретный спектр оператора $h(k)$, лежащий левее существенного спектра, всегда является не пустым при всех k∈Td \{0}. В работе [6], предполагая дисперсионные соотношения частиц $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ линейно зависимыми функциями, доказано, что из положительности $h(0)$ следует положительность $h(k)$ при всех $k \in T^3 \setminus \{0\}$.

В [7] исследована система двух частиц на трёхмерное решетке с некоторой дисперсионной функцией, описывающей перенос частицы с узла на соседний узел, взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только на ближайших соседних узлах. Изучены спектральные свойства семейства операторов $h(k)$, в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in T^2$ (T^2- двухмерной тор)

В работе рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $h(k)$, $k \in$ T^2, соответствующий системе двух частиц на одномерной решетке, где в качестве потенциала берется некоторый $4N + 1$ – мерный интегральный оператор, и в зависимости от N выбирается дисперсионная функция. Изучено существование собственных значений семейства операторов $h(k)$, в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса k.

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть Z^2 – одномерная целочисленная решетка, $(Z^2)^2 = Z^2 \times Z^2$декартова степень Z^2 и $l_2((Z^2)^2)$ гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определенных на Z^2 .

Рассмотрим координатное представление гамильтониана системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с парным короткодействующим потенциалом $\hat{v}(\cdot)$ на одномерной решетке, действующего в пространстве $l_2(Z^2)^2$ по формуле:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ действуют по правилам:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1, n_2) = \sum_{s \in Z^2} \left[\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon_2}(s)\hat{\psi}(n_1, n_2 + s)\right],$$

$$(\hat{v}\hat{\psi})(n_1, n_2) = \hat{v}(n_1 - n_2)\hat{\psi}(n_1, n_2).$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1$ и $\hat{\varepsilon}_2$ – вещественнозначные четные функции, описывающие перенос частицы с узла на соседний узел, определенные по формуле

$$\hat{\varepsilon}_i = \begin{cases} \dfrac{2}{m_i} & \text{при} \quad s = 0, \\ -\dfrac{1}{2m_i} & \text{при} \quad s = \pm 2ne_\alpha \quad \alpha = 1{,}2 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

И

$$\hat{v}(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0 & \text{при} \quad s = 0 \\ 2\pi^2\mu_{l\alpha} & \text{при} \quad s = \pm l e_\alpha, \quad \alpha = 1,2 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m_i > 0$ – масса i – ой частицы, , $n \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$ μ_0, $\mu_{l\alpha} > 0$, e_α –единичные орты.

Отметим, что рассматриваемый оператор $\hat{h}$ является ограниченным, самосопряженным в $l_2(Z^2)^2$.

Пусть $T^2 = (-\pi, \pi]^2$, $L_2(T^2)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^2 . С помощью преобразования Фурье [3], [6]

$$\mathfrak{I}: l_2(Z^2)^2 \longrightarrow L_2(T^2)^2$$

$$(\mathfrak{I}\hat{f})(p) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s \in (Z^2)^2} \hat{f}(s)\, e^{-i(p,s)}$$

получим импульсное представление h оператора $\hat{h}$, т. е. $h = \mathfrak{I}\hat{h}\mathfrak{I}^{-1}$. Далее оператор h разложим в прямой операторный интеграл

$$h = \int_{T^2} \oplus h(k) dk,$$

где $h(k)$, $k \in T^2$ – самосопряженный оператор, действующий в $L_2(T^2)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbb{v}$$

здесь $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p - k), \qquad \varepsilon(p) = \sum_{s \in Z^2} \hat{\varepsilon}(s) e^{ips} = \sum_{i=1}^{2} (1 - \cos 2np_i)$$

и $\mathbb{v}$ – интегральный оператор с ядром

$$v(p-q)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{s\in Z^2}\hat{v}(s)e^{-i(p-q)s}=$$

$$=\mu_0+\frac{\mu_{li}}{2}\sum_{s=l}\sum_{i=1}^{2}e^{-i(p_i-q_i)l}+\frac{\mu_{li}}{2}\sum_{s=-l}\sum_{i=1}^{2}e^{i(p_i-q_i)l}=$$

$$=\mu_{li}\sum_{s=l}\sum_{i=1}^{2}\frac{e^{-i(p_i-q_i)l}+e^{i(p_i-q_i)l}}{2}=\sum_{l=0}^{N}\sum_{i=1}^{2}\mu_{li}\cos l(p_i-q_i).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [8] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}\big(h(k)\big)$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbb{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}\big(h(k)\big)$ состоит из области значения функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{ess}\big(h(k)\big)=\sigma\big(h_0(k)\big)=[m(k),M(k)],$$

Где $m(k)=\min_{p\in T^2}\mathcal{E}_k(p)\,,M(k)=\max_{p\in T^2}\mathcal{E}_k(p).$

Поскольку $\mathbb{v}\geq 0$, то

$$\sup(h(k)f,f)\leq\sup(h_0(k)\,f,f)=M(k)\,(f,f)\,,\quad f\in\,L_2(T^2)\,,$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma\big(h(k)\big)\cap(M(k),\infty)=\emptyset.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$n=\begin{cases}2\cdot HOK\,\{1,2,\dots,N-1\} & \text{при}\quad \mathrm{N}>1,\\ 1, & \text{если}\quad N=1.\end{cases}$$

где НОК — наименьшее общее кратное. Следует отметить, что если. N представляется

в виде степени некоторого простого числа, то число $\frac{n}{2N}$ является дробным. В противном случае число $\frac{n}{2N}$ является натуральным.

Введем следующие обозначения:

$$d(k,z)=\int\limits_{T^2}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z},\quad c_{Ni}(k,z)=\int\limits_{T^2}\frac{\cos^2 Ns_i\,ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z},$$

$$s_{N_i}(k,z)=\int\limits_{T^2}\frac{\sin^2 Ns_i\,ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z},\qquad (1)$$

$$\mu_i^0(k)=\frac{1}{s_{Ni}\big(k;m(k)\big)}\qquad (2)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p)=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2nk_i+\frac{1}{m_2^2}\cos 2np_i}\right).$$

Предположение **1.** Предположим, что $m=m_1=m_2$ *va*

$\Pi=\left\{k=(k_1,k_2)\in T^2\colon\ k_\alpha\right.$ хотя бы один равно $\left.k_\alpha=\pm\frac{\pi}{2n}\quad \alpha=1{,}2\right\}$

$\Pi_1=\left\{k=(k_1,k_2)\in T^2\colon\ k_1=\pm\frac{\pi}{2n}\right.$ или $\left.k_2=\pm\frac{\pi}{2n}\right\}$

$\Pi_2=\left\{k=(k_1,k_2)\in T^2\colon\ k_1=\pm\frac{\pi}{2n}\right.$ и $\left.k_2=\pm\frac{\pi}{2n}\right\}$

Теорема 1. Пусть выполняется предположение 1.

1. Если $\frac{n}{2N}$ – натуральное число и $k\in\Pi_1$ то для любого $\mu=\left(\mu_0,\mu^{(1)}\dots,\mu^{(N)}\right)\epsilon R_+^{2N+1},\mu^{(l)}=(\mu_{l1},\mu_{l2})$ оператор $h(k)$ имеет ровно

$$4N+\beta$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где

$$\beta=\begin{cases}0 & \text{если}\ \ \mu_{Ni}\in(0,\mu^0(k)]\\ 1 & \text{если}\ \ \mu_{Ni}\in(\mu^0(k),\infty)\end{cases}$$

2. Если $\frac{n}{2N}$ – натуральное число и $k\in\Pi_2$ то для любого $\mu=\left(\mu_0,\mu^{(1)}\dots,\mu^{(N)}\right)\epsilon R_+^{2N+1},\mu^{(l)}=(\mu_{l1},\mu_{l2})$ оператор $h(k)$ имеет ровно

$$4N+1$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, собственных значений, которые имеют вид $z_0 = \frac{4}{m} - 4\pi^2\mu_0$, $z_{l\alpha} = \frac{4}{m} - 2\pi^2\mu_{l\alpha}$ $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \epsilon R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$. При этом z_0 – простое, а $z_{l\alpha}$, $l \geq 1$, $\alpha = 1{,}2$ двукратное собственное значение.

Теорема 2. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\frac{n}{2N}$ – натуральное число, то для любого

$\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \epsilon R_+^{2N+1}$,

$\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ оператор $h(k)$ имеет ровно

$$4N + 1$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

2. Если $\frac{n}{2N}$ – дробное число, то для любого $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \epsilon R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ оператор $h(k)$ имеет ровно

$$4N - 1 + \sum_{i=1}^{2} \alpha(Ni)$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где

$$\alpha(Ni) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_{Ni} \in (0, \mu^0(k)] \\ 1 & \text{при } \mu_{Ni} \in (\mu^0(k), \infty) \end{cases}$$

Замечание. Следует отметить, что если $1 - \mu^* d(k, z^*) = 0$, $z < m(k)$, $\mu^* > 0$ и $\mu_l = \mu^*$ для всех $l \in \{1,2, \dots, N-1\}$ то число $z = z^*$ является не менее

$$4N - 2$$

кратным собственным значением оператора $h(k)$.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $h(k)$

Введем оператор $\tilde{h}(k)$, действующий в $L_2(T^2)$по формуле:

$$\tilde{h}(k) = \tilde{h}_0(k) - \mathbb{v},$$

Где $\tilde{h}_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}}\cos 2np_i\right).$$

Пусть унитарный оператор $U: L_2(T^2) \longrightarrow L_2(T^2)$ определен по формуле:

$$(Uf)(p) = f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right),$$

где

$$\theta_i(k_i) = \arccos\frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\cos 2nk_i}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}}}.$$

Тогда

$$(U^{-1}f)(p) = f\left(p + \frac{1}{2n}\theta(k)\right), \quad f \in L_2(T^2).$$

Лемма 1. Оператор $h(k)$ является унитарно эквивалентным оператору $\tilde{h}(k)$, т.е.

$$\tilde{h}(k) = U^{-1}h(k)U.$$

Доказательство. Поскольку имеет место представление

$$\mathcal{E}_k(p) = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}}\cos\big(2np_i - \theta_i(k_i)\big)\right)$$

то

$$(h_0(k)Uf)(p) =$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}}\cos\big(2np_i - \theta_i(k_i)\big)\right) \times$$

$$\times f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right)$$

Легко проверить, что

$$(U^{-1}h_0(k)Uf)(p)$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2nk_i+\frac{1}{m_2^2}\cos 2np_i}\right)f(p)$$

т. е.

$$U^{-1}h_0(k)U=\tilde{h}_0(k)$$

Ясно, что

$$(U^{-1}\mathbb{v}Uf)(p)=U^{-1}\left(\int\limits_{T^2}v(s-p)f\left(s-\frac{1}{2n}\theta(k)\right)ds\right)=$$

$$=\int\limits_{T^2}v\left(s-\left(p+\frac{1}{2n}\theta(k)\right)\right)f\left(s-\frac{1}{2n}\theta(k)\right)ds.$$

В последнем интеграле произведя замену $s-\frac{1}{2n}\theta(k)=t$, имеем

$$(U^{-1}\mathbb{v}Uf)(p)=\int\limits_{T^2}v(t-p)f(t)dt$$

т.е.

$$U^{-1}\mathbb{v}U=\mathbb{v}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Число z, $(z<m(k))$ является собственным значением оператора $\tilde{h}(k)$ тогда

и только тогда, когда $\Delta(k;z)=0$, где

$$\Delta(k;z)=\left(1-\mu_0 d(k;z)\right)\prod_{l=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{2}\left(1-\frac{\mu_{l\alpha}}{2}d(k;z)\right)^2$$ при натуральном $\frac{n}{2N}$

$$\Delta(k;z)=\left(1-\mu_0 d(k;z)\right)\prod_{l=1}^{N-1}\prod_{\alpha=1}^{2}\left(1-\frac{\mu_{l\alpha}}{2}d(k;z)\right)^2\left(1-\mu_{N\alpha}c_{N\alpha}(k;z)\right)$$
$$\times\left(1-\mu_{N\alpha}s_{N\alpha}(k;z)\right)$$

при дробном $\frac{n}{2N}$. При этом кратность нуля функции $\Delta(k;\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $h(k)$.

Доказательство. Пусть $z < m(k) -$ собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ и $f -$ соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение

$$\tilde{h}(k)f = zf$$

имеет нетривиальное решение f . Тогда

$$f = r_0(z)\mathbb{v}f, \tag{3}$$

где $r_0(z) -$ оператор умножения на функцию $\frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z}$. Введя обозначения

$$\varphi_{l\alpha} = \int_{T^2} \cos ls_\alpha f(s)ds \qquad \alpha = 1{,}2 \tag{4}$$

$$\psi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sin ls_\alpha f(s)ds \tag{5}$$

перепишем равенство (3) в виде

$$f(p) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z} \sum_{l=0}^{N} \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_{l\alpha}(\varphi_{l\alpha} \cos lp_\alpha + \psi_{l\alpha} \sin lp_\alpha) . \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в (4) и (5), пользуясь четностью функции $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ получим систему линейных уравнений

$$\varphi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sum_{r=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{2} \mu_{r\beta} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\beta ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{r\beta} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1{,}2 \tag{7}$$

$$\psi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sum_{r=1}^{N} \mu_{l\alpha} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{r\alpha} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1{,}2 \tag{8}$$

Из определения числа n следует, что число $\frac{n}{2l}$ является натуральным для всех $l = 1, \dots, N-1$. Отсюда следует, что функция $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ является периодической, с периодом $\frac{\pi}{2l}$ для всех $l = 1, \dots, N-1$. Покажем, что при всех $l = 1, \dots, 2N-1$ имеет место равенство

$$\int_{T^2} \frac{\cos l s_\alpha ds}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \qquad l = 1, \dots, 2N-1. \qquad (9)$$

Действительно, если l – нечетное (четное) число, то, заменяя переменную $s_\alpha = t_\alpha + \pi$ $\left(s_\alpha = t_\alpha + \frac{\pi}{l}\right)$ $, s_\beta = t_\beta,\ s_\gamma = t_\gamma$ в интеграле в левой части равенства (9), имеем

$$I_l(z) = -\int_{T^2} \frac{\cos l t_\alpha dt}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(t) - z} = -I_l(z).$$

Отсюда следует равенство (9). Из элементарных равенств

$$\cos l s_\alpha \cos r s_\alpha = \frac{1}{2}[\cos(l+r)s_\alpha + \cos(l-r)s_\alpha],$$

$$\sin l s_\alpha \sin r s_\alpha = \frac{1}{2}[\cos(l-r)s_\alpha - \cos(l+r)s_\alpha]$$

и из равенства (9) получим, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_{T^2} \frac{\cos l s_\alpha \cos r s_\alpha}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds = 0, \\ &\int_{T^2} \frac{\sin l s_\alpha \sin r s_\alpha}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds = 0 \end{aligned}\right. \qquad l \neq r. \qquad (10)$$

В силу (10) равенства (7) и (8) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{l\alpha} &= \int_{T^2} \mu_{l\alpha} \frac{\cos^2 l s_\alpha\, ds}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha}, \\ \psi_{l\alpha} &= \int_{T^2} \mu_{l\alpha} \frac{\sin^2 l s_\alpha\, ds}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \end{aligned}\right. \qquad l = 1, \dots, N, \qquad \alpha = 1,2$$

Определитель системы линейних уравнений относительно неизвестных $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N \quad \psi_1, \dots, \psi_N$ имеет вид

$$\Delta(k,z)=\prod_{l=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{2}\left[1-\mu_{l\alpha}\int_{T^2}\frac{\cos^2 ls_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}\varphi_{l\alpha}\right]\left[1-\mu_{l\alpha}\int_{T^2}\frac{\sin^2 ls_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}\psi_{l\alpha}\right]$$

При этом, если $z<m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ то,

$$\Delta(k,z)=$$

$$\left(1-\mu_0 d(k;z)\right)\prod_{l=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{2}\left[1-\mu_{l\alpha}\int_{T^2}\frac{\cos^2 ls_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}\varphi_{l\alpha}\right]\left[1-\mu_{l\alpha}\int_{T^2}\frac{\sin^2 ls_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}\psi_{l\alpha}\right]$$
$$=0$$

Легко показать, что согласно (10) для всякого $l\leq N$ при натуральном $\frac{n}{2N}$ имеет место равенство

$$\int_{T^2}\frac{\cos^2 ls_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}=\int_{T^2}\frac{\sin^2 ls_\alpha\, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}=\frac{1}{2}\int_{T^2}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\Delta(k,z)=\left(1-\mu_0 d(k;z)\right)\prod_{l=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{2}\left(1-\frac{\mu_{l\alpha}}{2}d(k;z)\right)^2=0$$

Обратно, пусть $\Delta(k,z)=0$. Тогда для некоторых$l\in\{0,\dots,N\}$ и $z<m(k)$ хотя бы один из множителей $\Delta(k,z)$ обращается в нуль, т.е. либо

$1-\mu_0\int_{T^2}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}=0,$ либо $\left(1-\frac{\mu_{l\alpha}}{2}d(k;z)\right)^2=0.$

При этом легко проверить, что число $z<m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ и

$$\text{либо } \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z}, \text{либо } \frac{\cos lp_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z} \text{ и } \frac{\sin lp_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z}$$

,

соответствующие собственные функции.

При дробном $\frac{n}{2N}$ применимы точно такие же рассуждения.

Заметим также, что кратность нуля функции $\Delta(k;\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $\tilde{h}(k)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняется предположение 1. Тогда $\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{4}{m}$ и

$$\Delta(k,z) =$$

$$(1 - \mu_0 d(k;z)) \prod_{l=1}^{N} \prod_{\alpha=1}^{2} \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha \, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha}\right]\left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha \, ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha}\right]$$

$$= = \left(1 - \frac{4\pi^2\mu_0}{\frac{4}{m} - z}\right) \prod_{l=1}^{N} \prod_{\alpha=1}^{2} \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha} 2\pi^2}{\frac{4}{m} - z}\right)^2 = 0$$

Отсюда легко находим нули функции $\Delta(k;\cdot)$: $z_0 = \frac{4}{m} - 4\pi^2\mu_0$ – однократный нуль, $z_{l\alpha} = \frac{4}{m} - 2\pi^2\mu_{l\alpha}$ – двукратный нуль, $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \epsilon R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ Согласно леммам 2 и 1 эти числа являются собственными значениями $h(k)$. Легко проверить, что этим собственным значениям соответствуют следующие собственные функции:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi^2\mu_0}, \quad \varphi_{l\alpha}^{+} = \frac{\cos lp}{2\pi^2\mu_{l\alpha}}, \quad \varphi_{l\alpha}^{-} = \frac{\sin lp}{2\pi^2\mu_{l\alpha}}, \qquad l = \overline{1,N} \quad \alpha = 1,2.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда для всякого $k \in T^2$ число $\mu^0(k)$, определенное по формуле (2), является конечным.

Имеют место соотношения

$$1 - \mu_0 d(k;z) = \begin{cases} \text{монотонно убывает для всякого} & z \in (-\infty, m(k)], \\ -\infty \quad \text{при} \ , \ z \to m(k), \\ 1 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k;z) = \begin{cases} \text{монотонно убывает для всякого} & z \in (-\infty, m(k)], \\ -\infty \quad \text{при} \quad z \to m(k), \\ 1 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \end{cases}$$

$$1-\mu_{N\alpha}c_{N\alpha}(k;z) = \begin{cases} \text{монотонно убывает для всякого} & z\in(-\infty,m(k)], \\ -\infty & z\to m(k), \\ 1 \quad \text{при} & z\to-\infty, \end{cases}$$

$$1-\mu_{N\alpha}s_{N\alpha}(k;z) = \begin{cases} \geq 0 \ \text{при} \ \mu_{N\alpha}\in\left(0,\mu^0(k)\right] \ \text{для всякого} \ z\in(-\infty,m(k)], \\ <0 \ \text{при} \ \mu_{N\alpha}>\mu^0(k), \ z=m(k), \\ 1 \quad \text{при} \quad z\to-\infty, \end{cases}$$

Заметим, что функции $d(k;\cdot), c_{N\alpha}(k;\cdot), s_{N\alpha}(k;\cdot)$ определенные по формуле (1), являются положительными, монотонно возрастающими на $(-\infty,m(k)]$. Поэтому из последних соотношений имеем

$$1-\mu_0 d(k;\cdot) \quad \text{имеет единственный нуль для любого } \mu_0>0,$$

$$1-\mu_{l\alpha} d(k;\cdot) \quad \text{имеет единственный нуль для любого } \mu_{l\alpha}>0,$$

$$1-\mu_{N\alpha}c_{N\alpha}(k;\cdot) \ \text{имеет единственный нуль для любого } \mu_{N\alpha}>0,$$

$$1-\mu_{N\alpha}s_{N\alpha}(k;\cdot) = \begin{cases} \text{не имеет нулей при} & \mu_{N\alpha}\in(0,\mu^0(k)], \\ \text{имеет единственный нуль при} & \mu_{N\alpha}\in(\mu^0(k);\ \infty) \end{cases}$$

Отсюда и согласно леммам 2 и 1 получим доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды матем. инс-та. АН СССР. 1963. 122 с.

2. D.C. Mattis The few-body problem on lattice // Rew. mod. Phys. 58. 1986. P. 361–379.

3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // Commun. Math. Phys. 262. 2006. P. 91–115.

4. E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos The spectrum of two-particle bound states of transfer matrices of Gibbs fields (fields on a two-dimensional lattice: adjacent levels) // Funct. Anal. Appl. Vol. 39, №. 1. 2005. P. 31–45.

5. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O'Carroll Energy momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonians // Physical review E, Vol. 66:1, 6130. 2002.

6. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. Т. 153, №. 3. 2007. С. 381–387.

7. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 102-110.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики М.: Мир. Т. 4. Анализ операторов. 1982.

REFERENCES

1. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды матем. инс-та. АН СССР. 1963. 122 с.

2. D.C. Mattis The few-body problem on lattice // Rew. mod. Phys. 58. 1986. P. 361–379.

3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // Commun. Math. Phys. 262. 2006. P. 91–115.

4. E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos The spectrum of two-particle bound states of transfer matrices of Gibbs fields (fields on a two-dimensional lattice: adjacent levels) // Funct. Anal. Appl. Vol. 39, №. 1. 2005. P. 31–45.

5. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O'Carroll Energy momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonians // Physical review E, Vol. 66:1, 6130. 2002.

6. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. Т. 153, №. 3. 2007. С. 381–387.

7. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 102-110.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики М.: Мир. Т. 4. Анализ операторов. 1982.