

KORRELATSION MODELLARNI QURISH USULLARI

Saidov Hamroqul Quvondiqovich

(Buxoro muhandislik-texnologiya instituti, f.-m.f.n, dotsent)

E-mail: saidovhk@gmail.com

ANNOTATSIYA

Xalq xo'jaligining turli masalalarini yechishda ko'p hollarda ba'zi bir ko'rsatkichlarni oldindan bashorat qilishga to'g'ri keladi. Bunday bashoratlar xo'jalik mexanizmi doimiy o'zgarimagan va ko'p yillar muqim ishlab turgan hollarda to'g'ri keladi. Ushbu maqolada eng sodda jarayonlar matematik modeli tahlil qilinadi va bashorat qilinadi.

Kalit so'zlar: Matematik model, bashorat qilish, chiziqli bog'lanish, korrelatsiya koeffitsiyenti.

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

АННОТАЦИЯ

При решении различных вопросов народного хозяйства в большинстве случаев приходится заранее прогнозировать некоторые показатели. Такие прогнозы верны в тех случаях, когда хозяйственный механизм не меняется и постоянно работает в течение многих лет. В этой статье будет проанализирована математическая модель простейших процессов и сделаны прогнозирование.

Ключевые слова. Математическая модель, прогнозирование, линейная связь, коэффициент корреляции.

METHODS OF CONSTRUCTING CORRELATION MODELS

ABSTRACT

When dealing with various issues of the national economy, in most cases it is necessary to forecast some indicators in advance. Such forecasts are true in those cases, when the economic mechanism does not change and constantly works for many years. In this article the mathematical model of the simplest processes will be analyzed and pro-forecasting will be made.

Keywords. *Mathematical model, prediction, linear relationship, correlation coefficient.*

Xalq xo‘jaliginnigining turli masalalarini yechishda ko‘p hollarda ba’zi bir ko‘rsatkichlarni oldindan bashorat qilishga to‘g‘ri keladi. Bunday bashoratlar xo‘jalik mexanizmi doimiy o‘zgarmaganda va ko‘p yillar muqim ishlab turgan hollarda to‘g‘ri keladi.

Masalan, qishloq xo‘jaligini oladigan bo‘lsak, fermer xo‘jaligining oila pudrati, ijara pudratisiz ishlayotgan paytdagi raqamlar bilan qilingan bashoratlar, bu xo‘jaliklarning yangi xo‘jalik mexanizmi asosida ishlashga o‘tgandagi vaqt uchun to‘g‘ri kelmaydi. Chunki, har qanday yangi xo‘jalik mexanizmi asosida ishlab chiqarish unumdorligi oshadi, material va texnik resurslarning sarfi kamayadi va hokazo.

Bu sohada ko‘p ishlar qilingan va ilmiy maqolalar chop etilgan. Biz ushbu maqolada sohaning amaliy qismiga urg‘u berdik.

Demak, yuqoridagilarni hisobga olib, birinchidan, qilinadigan bashoratlar sifati va aniqligi xo‘jalik mexanizmi va iqtisodiy tizim turg‘un bir ko‘rinishga ega bo‘lgandagina yuqori darajada bo‘lishi mumkin.

Ikkinchidan, olinadigan tizim to‘g‘risidagi ma’lumotlarning qanchalik to‘g‘ri va to‘liq bo‘lishi ham qilinadigan bashoratlar sifatiga katta ta’sir qiladi.

Xalq xo‘jaligida bashoratlar turli xil yo‘llar orqali amalga oshirilishi mumkin. Masalan, sohaning kuchli ekspertlari va xo‘jalik rahbarlari tomonidan qilinadigan bashorat ko‘p hollarda to‘g‘ri bo‘lib chiqadi. Chunku ular xo‘jalikning (korxonaning) pasd-balandini, kuchli yoki kuchsiz tomonlarini yaxshi bilishadi.

Bashorat qilishning ikkinchi bir yo‘li, matematik usullar yordamida amalga oshiriladi. Buning uchun birinchi bajariladigan ish, kuzatilayotgan jarayon qaysi qonun asosida borayotganligini bilish muhim ahamiyatga ega.

Bashoratlar odatda quyidagi stoxastik (tasodifiy) bog‘lanishga ega bo‘lgan funksiyalar yordamida amalga oshiriladi.

Chiziqli bog‘lanishga ega bo‘lgan jarayonlar.

Agar natijaviy ko‘rsatkich Y faqat bitta o‘zgaruvchi X ga bog‘liq bo‘lsa, u holda bu bog‘lanishning chiziqli ekanligi isbotlash mumkin.

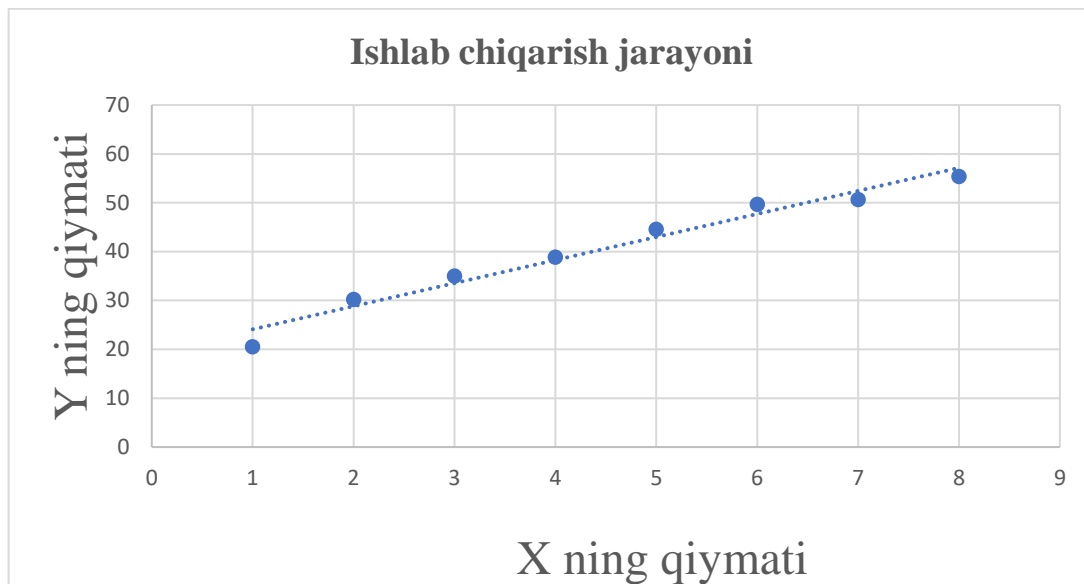
Buning uchun Y va X ning qiymatlarini Dekart koordinatalar sistemasida tasvirlaymiz. Agar hosil bo‘lgan nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yoki taxminan o‘sha chiziq atrofida joylashgan bo‘lsa, bu bog‘lanishni chiziqli deb qabul qilish mumkin.

Masalan, bibror ishlab chiqarish korxonasining 8 yil mobaynida yalpi ishlab chiqargan mahsuloti haqidagi ma’lumot 1-jadvalda keltirilgan bo‘lsin:

Yillar (X)	Yalpi ishlab chiqarilgan mahsulot (Y)
1	20,5
2	30,5
3	35
4	38,9
5	44,6
6	49,7
7	50,7
8	55,4

Shu ishlab chiqarish jarayonini ifodalovchi raqamlarning qaysi qonuniyat asosida o‘shini aniqlang.

Buning uchun Y va X ning qiymatlarini Dekart koordinatalar sistemasida tasvirlaymiz. Agar hosil bo'lgan nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yoki taxminan o'sha chiziq atrofida joylashgan bo'lsa, bu bog'lanishni chiziqli deb qabul qilish mumkin.



Agar X ning aniq qiymatlari berilgan jadval bo'lsa, uni yillar emas balki, boshqa miqdor deb talqin qilish mumkin. Va yuqoridagi mulohazalarni yuritish mumkin.

Demak, yuqorida aytilganidek, chiziqli ko'rinishga ega bo'lgan jarayonni

$$\bar{y} = a + bx \text{ yoki } \bar{y} = a + bt$$

ko'rinishdagi modellar orqali ifodalash mumkin. Bu yerda \bar{y} bashorat qilinadigan model (o'zgaruvchi), a, b lar topilishi kerak bo'lgan koeffitsiyentlar bo'lib hisoblanadi.

Koeffitsiyentlarni odatda – eng kichik kvadratlar usuli yordamida topiladi. Ya'ni,

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx_i]^2 \Rightarrow \min \quad (1)$$

(1) tenglikning asosiy ma'nosi quyidagicha talqin qilinadi – amaliyotda olingan natijalar bilan nazariy qiymatlar orasidagi farqning kvadratlari yig'indisi minimal

bo'lishi kerakligini bildiradi. Boshqacha talqini, ya'ni analitik geometriya tilida quyidagicha aytish mumkin - $\bar{y} = a + bx$ chiziqlar oilasi a, b larning o'zgarishi yordamida butun XOY tekisligini to'ldiradi. Shu oiladan shunday birini tanlash kerakki, bu chiziq keltirilgan Y ning amaliy qiymatlariga eng yaqin bo'lsin.

Endi yuqoridagi mulohazalarni, masalalarni yechish uchun matematik analizga murojaat qilamiz.

(1) funksiya ko'p o'zgaruvchili (a, b ga nisbatan) funksiya bo'lganligi uchun, uning ekstremumini topish qoidasiga asosan, funksiyaning minimum kritik nuqtalarda, ya'ni, xususiy hosilalarning nolga teng bo'lgan nuqtalarda bo'lishi haqidagi tasdiqqa asosan, ya'ni:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx_i] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i [y_i - a - bx_i] = 0,$$

Ushbu tengliklarni soddalashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \quad (2)$$

(2) tenglamalar sistemasidagi chekli yig'indilarni topish uchun quyidagi jadval orqali topish qulaydir:

1-jadval

X	Y	Y ²	X ²	XY
1	20,5	420,25	1	20,5
2	30,5	930,25	4	61
3	35	1225	9	105
4	38,9	1513,21	16	155,6
5	44,6	1989,16	25	223
6	49,7	2470,09	36	298,2
7	50,7	2570,49	49	354,9
8	55,4	3069,16	64	443,2
36	325,3	14187,61	204	1661,4

$$\begin{cases} 325,3 = 8a + 36b \\ 1661,4 = 36a + 204b \end{cases} \quad (3)$$

Bu sistemadan $a = 19,5, b = 4,7$ ekanligini topamiz. Demak, biz izlayotgan model

$$\bar{y} = 19,5 + 4,7x \quad (4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Endi bu model asosida nazariy qiymatlarni topamiz:

$$\bar{y}(1) = 19,5 + 4,7 \cdot 1 = 24,2;$$

$$\bar{y}(2) = 19,5 + 4,7 \cdot 2 = 28,9;$$

$$\bar{y}(3) = 19,5 + 4,7 \cdot 3 = 33,6;$$

$$\bar{y}(4) = 19,5 + 4,7 \cdot 4 = 38,3;$$

$$\bar{y}(5) = 19,5 + 4,7 \cdot 5 = 43,0;$$

$$\bar{y}(6) = 19,5 + 4,7 \cdot 6 = 47,7;$$

$$\bar{y}(7) = 19,5 + 4,7 \cdot 7 = 52,4;$$

$$\bar{y}(8) = 19,5 + 4,7 \cdot 8 = 57,1.$$

Bu qiymatlar asosida 2-jadvalni tuzamiz:

2-jadval

X	Y	\bar{Y}	$Y - \bar{Y}$
1	20,5	24,2	-3,7
2	30,5	28,9	1,6
3	35	33,6	1,4
4	38,9	38,3	0,6
5	44,6	43,0	1,6
6	49,7	47,7	2,0
7	50,7	52,4	-1,7
8	55,4	57,1	-1,7

Topilgan nazariy qiymatlarni va haqiqiy qiymatlarni solishtirib, qaralayotgan jarayon chiziqli funksiya ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi jadvalda ko‘rsatilmagan yillar, ya’ni, $X = 9, 10, 11, 12$ qiymatlar uchun bashorat qilishimiz mumkin bo‘ladi. Yuqoridagi (4) formulaga asosan

$$\bar{y}(9) = 19,5 + 4,7 \cdot 9 = 61,8;$$

$$\bar{y}(10) = 19,5 + 4,7 \cdot 10 = 66,5;$$

$$\bar{y}(11) = 19,5 + 4,7 \cdot 11 = 71,2;$$

$$\bar{y}(12) = 19,5 + 4,7 \cdot 12 = 75,9.$$

natijalarni olamiz.

Endi approksimatsiya xatoligini baholaymiz. Ya'ni,

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|Y - \bar{Y}|}{Y} \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 42,1\% = 5,3\%.$$

Demak, approksimatsiya xatoligi 5,3% ekan. Buning ma'nosi, biz kelgusida qiladigan bashoratimiz, haqiqiy qiymatlardan taxminan $\pm 5,3\%$ ga farq qilishi mumkin.

Bashorat qilishda ya'na ba'zi-bir kattalik, jumladan, bog'liqlik darajasini bildiruvchi – korrelatsiya koeffitsiyentini baholash ham muhimdir. Bizning modelda $\bar{y} = a + bx$ korrelatsiya koeffitsiyentini quyidagi formulalar orqali topamiz:

1) O'rtacha kvadratik chetlanishi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}},$$

bu yerda \bar{x}, \bar{y} lar o'rtacha arifmetik qiymatlar;

2) Korrelatsiya koeffitsiyenti

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{n \sum_{i=0}^n xy - \sum_{i=0}^n x \sum_{i=0}^n y}{\sqrt{n \sum_{i=0}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=0}^n y_i^2 - (\sum_{i=0}^n y_i)^2}}.$$

Korrelatsiya koeffitsiyenti uchun quyidagi munosabatlarni aytib o'tamiz:

a) Agar $0,3 < r < 0,7$ bo'lsa, faktorlar orasidagi bog'lanish o'rtacha tig'izlikda deb hisoblanadi;

b) Agar $0,7 < r < 0,9$ bo'lsa, faktorlar orasidagi bog'lanish yuqori tig'izlikda deb hisoblanadi;

c) Agar $r < 0,3$ bo'lsa, faktorlar o'zaro bo'sh bog'langan deb hisoblanadi yoki X ning o'zgarishi Y ning o'zgarishiga olib kelmaydi degan xulosa chiqarish mumkin.

Yuqoridagi misolda

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{n \sum_{i=0}^n xy - \sum_{i=0}^n x \sum_{i=0}^n y}{\sqrt{n \sum_{i=0}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=0}^n y_i^2 - (\sum_{i=0}^n y_i)^2}} = \\
 &= \frac{8 \cdot 1661,4 - 36 \cdot 325,3}{\sqrt{8 \cdot 204 - 36^2} \cdot \sqrt{8 \cdot 14187,61 - 325,3^2}} = \\
 &= \frac{13291,2 - 11710,8}{\sqrt{1632 - 1296} \cdot \sqrt{113500,88 - 105820,09}} = \frac{1580,4}{18,33 \cdot 87,64} \\
 &= \frac{1580,4}{1606,44} = 0,98.
 \end{aligned}$$

Bundan, korrelatsiya koeffitsiyenti $r = 0,98$, ya'ni, 1 ga yaqiligini ko'ramiz. Demak, faktorlar orasida mustahkam bog'lanish bor ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi hisoblashlarni qiymatlar soni ko'p bo'lganda qo'lda bajarish qiyinchiliklarga, xatoliklarga olib kelishi mumkin. Shuning uchun hisoblashlarni maxsus dasturlarda bajarish tavsiya etiladi.

Xulosa

Albatta bunday hisoblashni qo'lda bajarish qiyinchiliklarga olib keladi. Axborot texnologiyarning rivojlanishi bu sohada ham maxsus dasturlarning ishlab chiqilishiga olib keldi. Jumladan, IBM SPSS Statistics, [3] dastur paketi ushbu sohada yetakchi hisoblanadi. Ushbu dastur yuqorida ko'rilgan masalalarni va boshqa masalalar (chiziqli bog'lanishga ega bo'lmagan jarayonlar) ni aniq va to'la yechib bera oladi. Biz ushbu maqolada bu usul haqida qisqa nazariy ma'lumotlarni berdik [1, 2].

Adabiyotlar

1. В.Е. Гмурман. «Теория вероятностей и математическая статистика». Москва-Юрайт. – 2015 г. 479 с.
2. Очиллов Ш.Б., Раззаков Ш.И., Сайидов Х.К. «Корреляцион моделларни куришдан қўлланма». БухМТИ. 1990 й. 30 б.
3. <https://www.ibm.com/products/spss-statistics>
БухМТИ, 2023 йил, 22 июн.