МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Мустафоев Немат Сафоевич

Бухарский инженерно - технологический институт.

Старший преподователь кафедры «Высшая математика»

АННОТАЦИЯ

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат. Индукция применяется при переходе от частных результатов к общим, т.е. является методом, противоположным дедуктивному.

Ключевые слова. *математической индукции, дедуктивный и индуктивный методы,*

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Хотя и выросла область применения метода математической индукции, в школьной программе ему отводится мало времени. Ну, скажите, что полезного человеку принесут те два-три урока, за которые он услышит пять слов теории, решит пять примитивных задач, и, в результате получит пятёрку за то, что он ничего не знает.

А ведь это так важно - уметь размышлять индуктивно.

Основная часть

По своему первоначальному смыслу слово “индукция” применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является полная индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах 4< n < 20 представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5;

14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция).

Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является мощным методом открытия новых истин.

Пусть, например, требуется найти сумму первых n последовательных нечётных чисел. Рассмотрим частные случаи:

$1=1=1^2$

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+7+9=25=5^2$

После рассмотрения этих нескольких частных случаев напрашивается следующий общий вывод:

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

т.е. сумма n первых последовательных нечётных чисел равна n^2

Разумеется, сделанное наблюдение ещё не может служить доказательством справедливости приведённой формулы.

Полная индукция имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев мы не в состоянии. Неполная же индукция часто приводит к ошибочным результатам.

Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции. Он заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например, нужно доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для n=1. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при n=k вытекает его справедливость и при n=k+1.

Тогда утверждение считается доказанным для всех n. В самом деле, утверждение справедливо при n=1. Но тогда оно справедливо и для следующего числа n=1+1=2. Из справедливости утверждения для n=2 вытекает его справедливость для n=2+1=3. Отсюда следует справедливость утверждения для n=4 и т.д. Ясно, что, в конце концов, мы дойдём до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.

Принцип математической индукции.

Если предложение A(n), зависящее от натурального числа n, истинно для n=1 и из того, что оно истинно для n=k (где k-любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа n=k+1, то предположение A(n) истинно для любого натурального числа n.

В ряде случаев бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для n>p, где p-фиксированное натуральное число. В этом случае принцип математической индукции формулируется следующим образом.

Если предложение A(n) истинно при n=p и если A(k)⇒A(k+1) для любого k>p, то предложение A(n) истинно для любого n>p.

Доказательство по методу математической индукции проводиться следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется для n=1, т.е. устанавливается истинность высказывания A(1). Эту часть доказательства называют базисом индукции. Затем следует часть доказательства, называемая индукционным шагом. В этой части доказывают справедливость утверждения для n=k+1 в предположении справедливости утверждения для n=k (предположение индукции), т.е. доказывают, что A(k)⇒A(k+1).

Пример 1. Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2N-1)=N^2$.

Решение: 1) Имеем $n=1=1^2$. Следовательно,

утверждение верно при n=1, т.е. A(1) истинно.

2) Докажем, что A(k)⇒A(k+1).

Пусть k-любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для n=k, т.е. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$.

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа n=k+1, т.е. что $1+3+5+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$.

В самом деле, $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Итак, $A(k)\Rightarrow A(k+1)$. На основании принципа математической индукции заключаем, что предположение $A(n)$ истинно для любого $n\in N$.

Пример 2. Доказать, что

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=(x^{n+1}-1)/(x-1), \text{ где } x\neq 1$$

Решение: 1) При n=1 получаем

$$1+x=(x^2-1)/(x-1)=(x-1)(x+1)/(x-1)=x+1$$

следовательно, при n=1 формула верна; A(1) истинно.

2) Пусть k-любое натуральное число и пусть формула верна при n=k, т.е.

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k=(x^{k+1}-1)/(x-1).$$

Докажем, что тогда выполняется равенство

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=(x^{k+2}-1)/(x-1).$$

В самом деле

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k)+x^{k+1}=$$
$$=(x^{k+1}-1)/(x-1)+x^{k+1}=(x^{k+2}-1)/(x-1).$$

Итак, $A(k)\Rightarrow A(k+1)$. На основании принципа математической индукции заключаем, что форму-ла верна для любого натурального числа n.

Пример 3. Доказать, что при любом n справедливо утверждение:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6.$$

Решение: 1) Пусть n=1, тогда $X_1=1^2=1(1+1)(2+1)/6=1.$

Значит, при n=1 утверждение верно.

2) Предположим, что n=k $X_k=k^2=k(k+1)(2k+1)/6.$

3) Рассмотрим данное утверждение при n=k+1

$$X_{k+1}=(k+1)(k+2)(2k+3)/6.$$

$$X_{k+1}=1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=k(k+1)(2k+1)/6+$$
$$+(k+1)^2=(k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2)/6=(k+1)(k(2k+1)+$$
$$+6(k+1))/6=(k+1)(2k^2+7k+6)/6=(k+1)(2(k+3/2)(k+$$
$$+2))/6=(k+1)(k+2)(2k+3)/6.$$

Мы доказали справедливость равенства и при n=k+1, следовательно, в силу метода математической индукции, утверждение верно для любого натурального n.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие / И.Т. Демидов, А. Н. Колмогоров, С.И. Шварцбург, О.С. Ивашев-Мусатов, Б.Е. Вейц. “Просвещение” 1975.