МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Баракаев Дилшод Умедович

Бухарский инженерно - технологический институт. преподователь кафедры «Высшая математика»

АННОТАЦИЯ

Воспользуемся методом прогонки для решения системы линейных уравнений.

Ключевые слова. *коэффициентов сплайна, метод прогонки, трехдиагональной матрицей.*

Система уравнений для определения коэффициентов сплайна представляет собой частный случай систем линейных алгебраических уравнений

$Ay = f$

с трехдиагональной матрицей $A = \|a_{ij}\|$, т.е. с матрицей, все элементы которой, не лежащие на главной и двух побочных диагоналях, равны нулю $(a_{ij} = 0$ при $j > i+1$ та $j < i-1)$.

В общем случае системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей имеют вид

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, j = \overline{1, N-1}, \qquad (1)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \qquad (2)$$

Для численного решения систем трехдиагональными матрицами применяется метод прогонки, который представляет собой вариант метода последовательного исключения неизвестных.

Т.е. матрицу A можно записать

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\chi_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\chi_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Идея метода прогонки состоит в следующим. Решение системы (1) ищется в виде

$$y_j=\alpha_{j+1}y_{j+1}+\beta_{j+1},\ j=\overline{0,N-1}, \qquad (3)$$

где α_{j+1},β_{j+1} -неизвестные коэффициенты, которые последовательно находятся от α_1,β_1 до α_N,β_N (прямая прогонка), а затем последовательно вычисляются $y_N,y_{N-1},\ldots,y_0$ (обратная прогонка) .

Выведем формулы для вычисления α_{j+1},β_{j+1}. Из (3) можно получить

$$y_{j-1}=\alpha_j y_j+\beta_j=\alpha_j(\alpha_{j+1}y_{j+1}+\beta_{j+1})+\beta_j=\alpha_j\alpha_{j+1}y_{j+1}+(\alpha_j\beta_{j+1}+\beta_j),\ j=\overline{1,N-1}.$$

Подставляя имеющиеся выражения для y_j,y_{j-1} в уравнение (1), приходим при $j=\overline{1,N-1}$ к уравнению $\left[\alpha_{j+1}(a_j\alpha_j-c_j)+b_j\right]y_{j+1}+\left[\beta_{j+1}(a_j\alpha_j-c_j)+a_j\beta_j+f_j\right]=0.$

Последнее уравнение будет выполнено если коэффициенты α_{j+1},β_{j+1} выбрать такими, чтобы выражение в квадратных скобках обращались в нуль.

А именно, достаточно положить

$$\alpha_{j+1}=\frac{b_j}{c_j-\alpha_j a_j},\beta_{j+1}=\frac{a_j b_j+f_j}{c_j-\alpha_j a_j},j=\overline{1,N-1}. \qquad (4)$$

Для отыскания всех α_j,β_j достаточно задать α_1,β_1.

Эти начальные значения находим из требования эквивалентности условия (3) при $j=0,$ т.е. условия $y_0=\alpha_1 y_1+\beta_1$, первому из уравнений (2).

Таким образом, получаем

$$\alpha_1=\chi_1,\beta_1=\mu_1. \qquad (5)$$

Нахождение коэффициентов $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$ по формулам (4), (5) называется прямой прогонкой. После того, как прогоночные коэффициенты $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}, j = \overline{0, N-1},$ найдены, решение системы (1), (2) находится по рекуррентной формуле (3), начиная с $j = N-1$. Для начала счета по этой формуле требуется знать y_N, которое определяется из уравнений

$$y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N.$$

И равно

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N}.$$

Нахождение y_i по формулам

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, j = \overline{N-1, 0}, \qquad (6)$$

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N},$$

называется обратной прогонкой. Алгоритм решения системы (1), (2) определяемый формулами (4)-(6) называется методом прогонки.

Метод прогонки можно пременять, если знаменатели выражений (4), (6) не обрщаются в нуль.

Покажем, что для возможности применения метод прогонки достаточно потребовать, чтобы коэффициенты системы (1), (2) удовлетворяли условиям

$$\alpha_j \neq 0, b_j \neq 0, |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, j = \overline{1, N-1}, \qquad (8)$$

$$|\chi_1| \leq 1, |\chi_2| < 1.$$

Сначала докажем по индукции, что при условиях (7), (8) модули прогоночных коэффициентов $\alpha_j, j = \overline{1, N}$ не превосходят единицы. Согласно (5), (8) имеем $|\alpha_1| = |\chi_1| \leq 1$. Предположим, что $|\alpha_j| \leq 1$ для некоторого j и докажем, что $|\alpha_{j+1}| \leq 1$.

Прежде всего для любых двух комплексних чисел a и b докажем неравенство

$$|a-b| \geq |a|-|b|.$$

Из неравенство треугольника имеем $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|.$

Откуда $|a-b| \geq |a|-|b|.$

Вернемся теперь к доказательству $|\alpha_{j+1}| \leq 1$, если $|\alpha_j| \leq 1$. Согласно имеем оценку

$$|c_j - \alpha_j a_j| \geq |c_j| - |\alpha_j||a_j| \geq |c_j| - |a_j|,$$

а, используя (7) , получаем $|c_j - \alpha_j a_j| \geq |b_j| > 0,$

т.е. знаменатели выражений (4) не обрщаются в нуль.

Более того

$$|a_{j+1}| = \frac{|b_j|}{|c_j - \alpha_j a_j|} \leq 1.$$

Следовательно, $|\alpha_j| \leq 1, j \neq \overline{1, N}.$

Далее, учитывая второе из условий (8) и только что доказанное неравенство $|\alpha_N| \leq 1$, имеем

$$|1-\chi_2\alpha_N| \geq 1-|\chi_2||\alpha_N| \geq 1-|\chi_2| > 0,$$

т.е. не обращается в нуль и знаменатель в выражение для y_N .

К аналогичному выводу можно прийти и в том случае, когда условия (7), (8) заменяется условиями

$$a_j \neq 0; \beta_j \neq 0; |c_j| > |a_j| + |b_j|; j = \overline{1, N-1}, \quad (9)$$

$$|\chi_1| \leq 1; |\chi_2| \leq 1. \quad (10)$$

Таким образом при выполнении условий (7), (8) (так же как и условий (9), (10)) система (1), (2) эквивалентности системе (4)-(6). По этому эти условия гарантируют существование и единственность решения системы (1), (2) и возможность нахождения этого решения методом прогонки.

Кроме того, доказанные неравенство $|\alpha_j| \le 1$, $j = \overline{1, N}$ обеспечивают устойчивость счета по рекуррентным формулам (6). Последнее означает, что погрешность, внесенная на каком-либо шаге вычислений, не будет возрастает при переходу к следующим шагам.

Действительно, пусть в формуле (6) при $j = j_0 + 1$ вместо y_{j_0+1} вычислена величина $\tilde{y}_{j_0+1} = y_{j_0+1} + \delta_{j_0+1}$.

Тогда на следующим шаге вычислений, т.е. при $j = j_0$,

вместо

$y_{j_0} = \alpha_{j_0+1} y_{j_0+1} + \beta_{j_0+1}$ получим величину $\tilde{y}_{j_0} = \alpha_{j_0+1}(y_{j_0+1} + \delta_{j_0+1}) + \beta_{j_0+1}$ и погрешность окажется равной $\delta_{j_0} = \tilde{y}_{j_0} - y_{j_0} = \alpha_{j_0+1}\delta_{j_0+1}$.

Отсюда получаем, что $|\delta_{j_0}| = |\alpha_{j_0+1}||\delta_{j_0+1}| \le |\delta_{j_0+1}|$,т.е. погрешность не возрастает.

Подсчитаем число арифметических действий, выполняемых при решении задачи (1), (2) методом прогонки.

По формулам (4), что реализуемые с помощью шести арифметических действий, вычисления производятся $N-1$ раз, по формуле (6) выполняется 5 арифметических действий, наконец по формуле (3), требующей всего два действия, вычисления осуществляются N раз. Итак в методе прогонки всего затрачивается

$$Q = 6(N-1) + 5 + 2N = 8(N+1) - 9$$

арифметических действий, т.е. число действий растет линейно относительно числа неизвестных $N+1$.

При решении же произвольной системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса число действий пропорционально кубу числа неизвестных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала анализа для 9-10 классов / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 336с.