ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Шарипова Наргиза Уктамовна

Бухарский инженерно - технологический институт. Преподователь кафедры «Высшая математика».

АННОТАЦИЯ

Если задан явный вид функции, то выражение для производной часто оказывается достаточно сложным и желательно его заменить более простым. Если же функция задана только в некоторых точках (таблично), то получить явный вид ее производных вообще невозможно. В этих ситуациях возникает необходимость приближенного (численного) дифференцирования.

Ключевые слова. *численного дифференцирования, Интерполяционный многочлен Ньютона,*

Простейшая идея численного дифференцирования состоит в том, что функция заменяется интерполяционным многочленом (Лагранжа, Ньютона) и производная функции приближенного заменяется соответствующей производной интерполяционного многочлена $f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x)$, $f^{(m)}(x) \approx l_n^{(m)}(x), 0 \le m \le n.$

Рассмотрим простейшие формулы численного дифференцирования, которые получаются указанным способом.

Будем предполагать, что функция задана в равностоящих узлах

$x_i = x_0 + ih, h > 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ее значения и значения производных в узлах будем обозначать

$f(x_i) = f_i, f'(x_i) = f_i', f''(x_i) = f_i''.$

Пусть функция задана в двух точках x_0 и $x_1 = x_0 + h,$ ее значения $f_0, f_1.$

Построим интерполяционный многочлен первой степени $l_1(x) = f_0 + (x - x_0) f(x_0; x_1)$.

Производная $l_1'(x)$ равна $l_1'(x) = f(x_0; x_1) = \dfrac{f_1 - f_0}{h}$.

Производную функцию $f(x)$ в точке x_0 приближенно заменяем производной интерполяционного многочлена

$$f_0'(x) \approx \frac{f_1 - f_0}{h}. \qquad (1)$$

Величина $\dfrac{f_1 - f_0}{h}$ называется первой разностной производной.

Пусть $f(x)$ задана в трех точках $x_0, x_1 = x_0 + h, \quad x_{-1} = x_0 - h.$

Интерполяционный многочлен Ньютона второй степени имеет вид

$$l_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

Берем производную $l_2'(x) = f(x_0; x_1) + (2x - x_0 - x_1) f(x_0; x_1; x_{-1})$.

В точке x_0 она равна

$$l_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + (x_0 - x_1) \times \left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right] = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Получаем приближенную формулу

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \qquad (2)$$

Величина $\dfrac{f_1 - f_{-1}}{2h}$ называется центральной разностной производной.

Наконец, если взять вторую производную

$$l_2''(x) = 2 f(x_0; x_1; x_{-1}) = 2 \left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right] = \frac{f_1 - 2 f_0 + f_{-1}}{h^2},$$

получаем приближенную формулу.

$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2 f_0 + f_{-1}}{h^2}. \qquad (3)$$

Величина $\dfrac{f_1 - 2 f_0 + f_{-1}}{h^2}$ называется второй разностной производной.

Формулы (1)-(3) называются формулами численного дифференцирования.

Предполагая функцию f достаточное число раз непрерывно дифференцируемой, получим погрешности приближенных формул (1)-(3).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $f \in C[a,b], \xi_i \in [a,b]$ – произвольные точки, $i = \overline{1,n}$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $\dfrac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n} = f(\xi)$.

Доказательство. Очевидно неравенство $\min\limits_{[a,b]} f(x) \le \dfrac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n} \le \max\limits_{[a,b]} f(x)$.

По теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на замкнутом отрезке она принимает все значения между $\min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\max\limits_{[a,b]} f(x)$. Значит существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что выполняет указанное в лемме равенство.

Погрешности формул численного дифференцирования дает следующая лемма.

Лемма 2.

1. Предположим, что $f \in C_2[x_0, x_1]$. Тогда существует такая точка ξ, что

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), x_0 < \xi < x_1. \qquad (4)$$

2. Если $f \in C_3[x_{-1}, x_1]$, то существует такая точка ξ, что

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), x_{-1} < \xi < x_1. \qquad (5)$$

3. Когда $f \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то существует ξ такая, что

$$f_0'' = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), x_{-1} < \xi < x_1. \qquad (6)$$

Доказательство. По формуле Тейлора $f_1 = f_0 + hf_0' + \dfrac{h^2}{2} f''(\xi), \xi \in (x_0, x_1)$, откуда следует (4). Если $f \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то по формуле Тейлора

$$f_{\pm 1} = f_0 \pm h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' \pm \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_\pm), \qquad (7)$$

где $x_{-1} < \xi_- < \xi_+ < x_1$.

Подставим (7) в $\frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$. Получаем

$$\frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} = f_0'' + \frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+)\right]$$

Заменяя в соответствии с леммою 1 $f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+) = 2f^{(4)}(\xi), x_{-1} < \xi < x_1$,

Получаем $\frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} = f_0'' + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$.

Откуда и следует (6).

Равенство (5) доказывается аналогично (доказательство провести самостоятельно).

Формулы (4)-(6) называются формулами численного дифференцирования с остаточными членами.

Погрешности формул (1)-(3) оцениваются с помощью следующих неравенств, которые вытекают из соотношений (4)-(6):

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \le \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)|,$$

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f'''(x)|,$$

$$\left| f_0'' - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Говорят, что погрешность формулы (1) имеет первый порядок относительно h (или порядка h), а погрешность формул (2) и (3) имеет второй порядок относительно h (или порядка h^2). Также говорят, что формула численного дифференцирования (1) первого порядка точности (относительно h), а формулы (2) и (3) имеют второй порядок точности.

Указанным способом можно получать формулы численного дифференцирования для более старших производных и для большего количества узлов интерполирования.

Выбор оптимального шага. Допустим, что граница абсолютной погрешности при вычислении функции f в каждой точке удовлетворяет неравенству

$$\Delta f_i \le \overline{\Delta}. \qquad (8)$$

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 производные, через которые выражаются остаточные члены в формулах (5), (6), непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|f'''(x)| \le \overline{M}_3, \left|f^{(4)}(x)\right| \le \overline{M}_4, \qquad (9)$$

где $\overline{M}_3, \overline{M}_4$ - некоторые числа. Тогда полная погрешность формул (2), (3) (без учета погрешностей округления) в соответствии с (5), (6), (8), (9)не превосходит соответственно величин

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{\Delta} + \overline{\Delta}}{2h} + \frac{h^2}{6}\overline{M}_3, (10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\overline{\Delta} + 2\overline{\Delta} + \overline{\Delta}}{h^2} + \frac{h^2}{12}\overline{M}_4. (11)$$

Минимизация по h этих величин приводит к следующим значениям h:

$$h_1 = \left(\frac{3\overline{\Delta}}{\overline{M}_3}\right)^{1/3}, h_2 = 2\left(\frac{3\overline{\Delta}}{\overline{M}_4}\right)^{1/4}, \qquad (12)$$

при этом

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{\overline{M}_3\Delta^{-2}}{3}\right)^{1/3}, \varepsilon_2 = 2\left(\frac{\overline{M}_4\overline{\Delta}}{3}\right)^{1/2}. \qquad (13)$$

Если при выбранном для какой-либо из формул (2), (3) значении h отрезок $[x_{-1}, x_1]$ не выходит за пределы окрестности точки x_0, в которой выполняется соответствующее неравенство (9), то найденное h есть оптимальным и полная погрешность численного дифференцирования оценивается соответствующей величиной (13).

Список литературы.

1. Алгебра и начала анализа для 9-10 классов / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 336с.