ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНАМИ

Юлдошева Озода Олимжоновна.
Бухарский инженерно - технологический институт.
Преподователь кафедры «Высшая математика»

АННОТАЦИЯ

Одним из способов интерполяции на всем отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций. Сплайн-функцией или <u>*сплайном*</u> *называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке* $[a,b]$ *и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.*

Ключевые слова*. Сплайном, кубический сплайн, интерполяционным кубическим сплайном.*

Интерполирование многочленом Лагранжа или Ньютона на отрезке $[a,b]$ с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязано приводить к повышению точности. Для того, чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок $[a,b]$ разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом невысокой степени (так называемая <u>кусочно-полиномиальная интерполяция</u>). Слово „сплайн'' (английское spline) означает гибкую линейку, используемую для проведения гладких кривых через заданные точки плоскости.

Преимущество сплайнов перед обычной интерполяцией является, во-первых, их сходимость, и во-вторых, устойчивость процесса вычислений.

Рассмотрим частный, но распространенный в вычислительной практике случай, когда сплайн определяется с помощью многочленов третьей степени (кубический сплайн).

Пусть на $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем узлы (сетку):

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$

и обозначим $f_i = f(x_i), i \equiv \overline{0,n}.$

Интерполяционным кубическим сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам, называеться функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим усовиям:

а) на кождом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$ функция $s(x)$ является многочленом третьей степени;

б) функция $s(x)$, а так же ее первая и вторая производные непрерывны на $[a,b]$;

в) $s(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}.$

Последнее условие называется условием интерполирования.

Докажем существование и единственность сплайна, определяемого перечисленными условиями (плюс некоторые граничные условия, которые будут введены в процессе доказательства). Приводимое ниже доказательство содержит также способ построения сплайна.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$ будем искать функцию $s(x) = s_i(x)$ в виде многочлена третьей степени

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \qquad (1)$$

$x_{i-1} \le x \le x_i, i = \overline{1,n},$

где a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты, подлежащие определению. Выясним смысл введенных коэффициентов. Имеем

$$s_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2,$$

$$s_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i), s_i'''(x) = d_i,$$

поэтому $a_i = s_i(x_i), b_i = s_i'(x_i), c_i = s_i''(x_i), d_i = s_i'''(x_i).$

Из условий интерполирования $s_i(x_i) = f(x_i), i = \overline{1,n},$ получаем, что

$a_i = f(x_i), i = \overline{1,n}.$

Доопределим , кроме того , $a_0 = f(x_0)$.

Далее , требование непрерывности функции $s(x)$ приводит к условиям

$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), i = \overline{1,n-1}.$

Отсюда,учитывая выражения для функций $s_i(x)$, получаем при $i = \overline{0,n-1}$ уравнения

$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3.$ Обозначая $h_i = x_i - x_{i-1},$

перепишем эти уравнения в виде

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = \overline{1,n}. \quad (2)$$

Условия непрерывности первой производной $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i), i = \overline{1,n-1},$

приводят к уравнениям

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = \overline{2,n}. \quad (3)$$

Из условий непрерывности второй производной получаем уравнения

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, i = \overline{2,n}. \quad (4)$$

Объединяя (2) -(4) , получим систему $3n-2$ уравнений относительно $3n$ неизвестных $b_i, c_i, d_i, i = \overline{1,n}.$

Два недостающих условия получают, задавая те или иные граничные условия для $s(x)$. Предположим, например, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f''(a) = f''(b) = 0.$ Тогда естественно требовать, чтобы $s''(a) = s''(b) = 0.$ Отсюда получаем $s_1''(x_0) = 0,$ $s_n''(x_n) = 0,$ т.е. $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_n = 0.$

Заметим, что условие $c_1 = d_1 h_1 = 0$ совпадает с уравнением (4) при $i = 1,$ $c_0 = 0$. Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}, \quad c_0 = c_n = 0, \qquad (5)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, \quad i = \overline{2,n}, \qquad (6)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Убедимся в том, что эта система имеет единственное решение. Исключим из (5)- (7) переменные $b_i, d_i, i = \overline{1, n-1}$, и получим систему, содержащую только $c_i, i = \overline{1, n-1}$. Для этого рассмотрим два соседних уравнения (7) :

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}},$$

и вычтем второе уравнение из первого. Тогда получим

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}\left(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}\right) - \frac{1}{6}\left(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}\right) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}.$$

Подставляя найденное выражение для $b_i - b_{i-1}$ в правую часть уравнения (6), получим

$$h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{3} d_{i-1} - \frac{2h_i^2}{3} d_i = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right). \qquad (8)$$

Далее, из уравнения (5) получаем

$$h_i^2 d_i = h_i\left(c_i - c_{i-1}\right), h_{i-1}^2 d_{i-1} = h_{i-1}\left(c_{i-1} - c_{i-2}\right).$$

И подставляя эти выражения в (8), приходим к уравнению

$$h_{i-1} c_{i-2} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right) c_{i-1} + h_i c_i = 6\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right).$$

Окончательно для определения коэффициентов c_i получаем систему уравнений

$$h_i c_{i-1} + 2\left(h_i + h_{i+1}\right) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \qquad (9)$$

$$i = \overline{1, n-1}, c_0 = c_n = 0.$$

В силу диагонального преобладания система (9) имеет единственное решение. Так как матрица системы трехдиагональная, решение можно найти методом прогонки. По найденным коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i определяются с помощь явных формул

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad (10)$$
$$i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн, определяемый условиями а)-в) и граничными условиями $s''(a) = s''(b) = 0$. Заметим, что можно рассматривать и другие граничные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала анализа для 9-10 классов / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 336с.

2. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – К., Выща школа, 1988. – 120с.

3. Дороговцев А.Я. Інтеграл та його застосування. – К.: Вища школа. 1974. – 125с.

4. Дорофеев Г.М. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики // Математика в школе. – 1980. – №5 – с. 12-21, №6 – с. 24-30.