

## КОЛЕБАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ПУЛЬСИРУЮЩИМ СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

**Ахмедов Мақсуд Шарипович.**

Бухарский инженерно - технологический институт. Доцент, (PhD). кафедры

«Высшая математика».

[maqsud.axmedov.1985@mail.ru](mailto:maqsud.axmedov.1985@mail.ru)

### АННОТАЦИЯ

В работе разработана математические модели гидроупругости трехслойных пластин, взаимодействующих с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости. Исследованы на их основе динамики взаимодействия упругих трехслойных стенок канала со слоем вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в нем, в условиях вибрации.

**Ключевые слова:** пластинка, вязкая жидкость, нагрузка, амплитуда колебаний, частота колебания.

Исследование динамических процессов взаимодействия упругих трехслойных пластин со слоем вязкой жидкости представляет теоретический интерес, а его результаты имеют важное практическое значение для расчета и анализа работы ряда систем и объектов новой техники. Задачи деформирования трехслойных пластин при статических и динамических нагрузках изучены достаточно хорошо. Работ, посвященных взаимодействию трехслойных пластин с вязкой жидкостью, крайне мало [1,2].

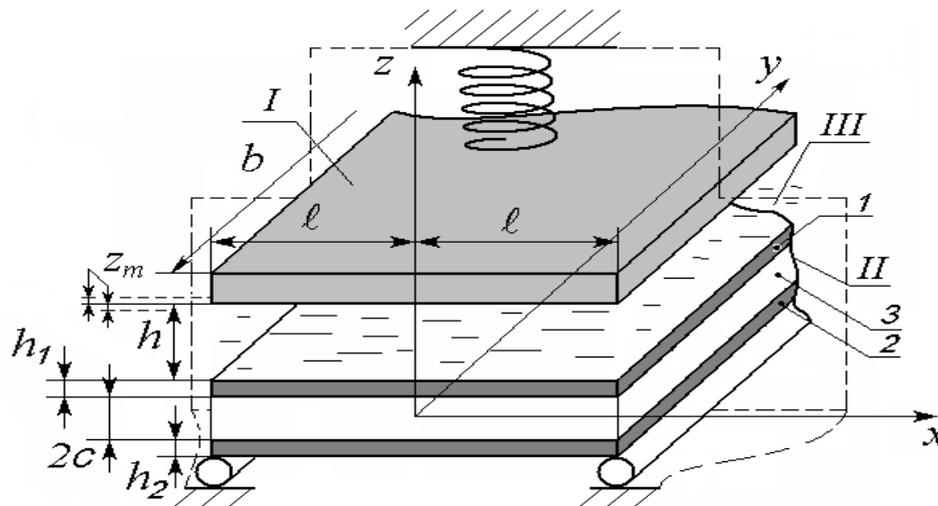


Рис.1. Расчетная схема

Щелевой канал представлен на рис.1. Одна из его стенок - абсолютно жесткое тело – штамп I, имеющий упругий подвес и совершающий колебания в вертикальной плоскости. Длина штампа  $b$  значительно больше ширины  $2\ell$ . Частота его колебаний  $\omega$ , а амплитуда колебаний  $z_m$ . Возбуждение штампа происходит за счет воздействия пульсирующего давления на торцах и переносного виброускорения основания канала. Вторая стенка канала – трехслойная пластина II, представляющая собой пакет, набранный из несущих слоев 1, 2 толщиной  $h_1$  и  $h_2$  и легкого несжимаемого заполнителя 3 толщиной  $2c$ . На торцах пластины предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Ширина и длина пластины, как у штампа. На торцах она свободно оперта, ее деформации считаются малыми. Канал полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью III. Средняя толщина жидкости в канале  $h_0$ . Штамп, трехслойная пластина и жидкость заключены в едином корпусе, имеющем справа и слева торцевые полости, заполненные той же жидкостью, что и жидкость в канале. В левой торцевой полости поддерживается заданное давление  $p_0 + p_1^-(\omega t)$ , в правой – давление  $p_0 + p_1^+(\omega t)$  ( $p_0$  – постоянное давление,  $p_1^-(\omega t)$ ,  $p_1^+(\omega t)$  – гармонические изменяющиеся по времени давления). Истечение из канала в полости свободное. Основание

корпуса совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с заданным виброускорением  $\ddot{z}_0$ .

Рассматривая плоскую задачу, вводили декартову систему координат  $Oxuz$ , связанную со срединной поверхностью заполнителя пластины, и следующие безразмерные переменные и малые параметры:

$$\zeta = (z - c - h_1)/h_0, \quad \xi = x/\ell, \quad \tau = \omega t, \quad w = w_m W, \quad u = u_m U, \quad \varphi = \varphi_m \Phi, \quad (1)$$

$$p_1^+ = \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} P_1^+(\tau), \quad p_1^- = \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} P_1^-(\tau), \quad p = p_0 + \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} P - \rho \ddot{z}_0 (z - h_0 - h_1 - c - z_m f_z(\tau)),$$

$$V_z = z_m \omega U_\zeta, \quad V_x = \frac{z_m \omega}{\psi} U_\xi, \quad \lambda = z_m/h_0 \ll 1, \quad \psi = h_0/\ell \ll 1,$$

где  $\psi$  – относительная толщина слоя жидкости;  $\lambda$  – относительная амплитуда колебаний штампа;  $V_x, V_z$  – компоненты скорости жидкости;  $w_m, u_m$  – амплитуды упругих перемещений пластины;  $\varphi$  – угол поворота нормали в заполнителе;  $\rho, \nu$  – плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Поставленная задача гидроупругости канала с трехслойной пластиной включает:

- уравнения динамики слоя жидкости (с точностью до  $\psi$ )

$$\frac{\omega h_0^2}{\nu} \left[ \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left( U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (2)$$

- уравнение динамики трехслойной пластины (трехслойной балки-полоски)

$$u_m \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{b_1}{\ell} w_m \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}, \quad \varphi_m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{b_2}{\ell} w_m \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}, \quad (3)$$

$$\frac{a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2}{\ell^4} w_m \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + m_0 \omega^2 w_m \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = -p_0 - \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} P + \rho h_0 \ddot{z}_0 \left( \lambda \frac{w_m}{z_m} W - 1 - \lambda f_z(\tau) \right)$$

,

- уравнение движения штампа

$$m_1 \ddot{z}_0 + m_1 \ddot{z}_1 + n_1 z_1 = N_3 \quad (4)$$

-выражение для силы, действующей на штамп со стороны жидкости

$$N_3 = 2\ell b p_0 + \rho v z_m \omega (h_0 \psi^2)^{-1} \int_0^1 \int_{-1}^1 P \ell d\xi dy, \quad (5)$$

где  $a_4, a_7, b_1, a_3, b_2$  – коэффициенты, отражающие жесткостные свойства пластины;  $m_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_3 c$ ,  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя,  $k = 1, 2, 3$  – номер слоя;  $m_1$  – масса штампа;  $n_1$  – коэффициент жесткости подвеса штампа;  $N_3$  – сила, действующая на штамп со стороны слоя жидкости при  $\zeta = 1 + \lambda f_z(\tau)$ .

В качестве граничных условий задачи выступают:

- условия прилипания жидкости к штампу и пластине

$$U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda f_z(\tau), U_\xi = \psi \frac{u_m}{z_m} \frac{\partial U}{\partial \tau}, U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W \quad (6)$$

- условия свободного торцевого истечения жидкости на торцах

$$P = P_1^+ \text{ при } \xi = 1; \quad P = P_1^- \text{ при } \xi = -1, \quad (7)$$

- условия опирания пластины (балки-полоски) на торцах для прогиба

$$W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \text{ при } \xi = 1; \quad W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \text{ при } \xi = -1. \quad (8)$$

Напряжения в слоях определяются выражениями

$$\sigma_x^{(1)} = (K_1 + (4/3)G_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (b_1 + cb_2 - z), \text{ при } c \leq z \leq c + h_1 \quad (9)$$

$$\sigma_x^{(2)} = (K_2 + (4/3)G_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (b_1 - cb_2 - z), \text{ при } -c \leq z \leq -c - h_2$$

$$\sigma_x^{(3)} = (K_3 + (4/3)G_3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (b_1 + zb_2 - z), \quad \sigma_{xz}^{(3)} = b_2 G_3 \frac{\partial w}{\partial x} \text{ при } -c \leq z \leq c,$$

где  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации в  $k$ -м слое.

В ходе решения поставленной задачи гидроупругости (1)-(9) исследовались вынужденные установившиеся колебания стенок канала при заданных гармонических законах движения основания канала и пульсации давления жидкости на торцах. Решение проводилось методом возмущений по малому параметру  $\lambda$ , т.е. представляется в виде асимптотического разложения

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \dots, U_\xi = U_{\xi 0} + \lambda U_{\xi 1} + \dots, U_\zeta = U_{\zeta 0} + \lambda U_{\zeta 1} + \dots, W = W_0 + \lambda W_1 + \dots \quad (10)$$

Подставляя разложение (10) в уравнение гидроупругости (2)-(8) и

рассматривая первый член разложения, осуществили линеаризацию задач. Для решения полученной задачи определяется частное решение неоднородных линейных уравнений в виде гармонических функций по времени с коэффициентами, зависящими от координат. Таким образом, решение уравнений (2), (3), записанных в нулевом приближении по  $\lambda$ , искали в виде  $T_0 = A_T \cos \tau + B_T \sin \tau$ . Здесь под  $T_0$  понимаются  $P_0, U_{\zeta 0}, U_{\zeta 0}, W_0$  коэффициенты  $A_T, B_T$  для  $P_0$  и  $W_0$  зависят только от  $\xi$ , для  $U_{\zeta 0}, U_{\zeta 0}$  они зависят от  $\xi$  и  $\zeta$ .

Решая уравнения динамики жидкости, определили давление в виде

$$P_0 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \left[ 2\varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma(\omega) \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \left( 2\varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + 12\gamma(\omega) \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{2}(\xi - 1) \frac{w_m}{z_m} \int_0^{\xi} \int_{-10}^{\xi} \left( 2\varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + 12\gamma(\omega) \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \frac{1}{2}(P_1^+ + P_1^-) + \xi \frac{1}{2}(P_1^+ - P_1^-),$$

где  $\alpha(\omega), \gamma(\omega)$  - частотозависимые коэффициенты;  $2\varepsilon^2 = \omega h_0^2 / \nu$ .

Форма прогиба пластины представлялась в виде бесконечного ряда

$$w = w_m W_0 = w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left( (R_k^0 + R_k(\tau)) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + Q_k(\tau) \sin k \pi \xi \right) \quad (12)$$

После подстановки (11), (12) в уравнения движения трехслойной пластины (3) и штампа (4) с учетом заданных законов вибрации основания и пульсаций давления на торцах

$$\ddot{z}_0 = E_z \omega^2 \sin(\tau + \varphi_0) = kg \sin(\tau + \varphi_0),$$

$$\frac{1}{2}(p_1^+ + p_1^-) = p_m f_p(\tau) = p_m \sin(\tau + \varphi_p), \quad \frac{1}{2}(p_1^+ - p_1^-) = q_m f_p(\tau) = q_m \sin(\tau + \varphi_p)$$

были найдены законы движения штампа и трехслойной пластины

$$z = \frac{2\ell b}{n_1} p_0 + p_m \Pi_{zp}(\omega) \sin(\tau + \varphi_p + \Psi_p(\omega)) + kg \Pi_{z_0}(\omega) \sin(\tau + \varphi_0 + \Psi_0(\omega)), \quad (13)$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left\{ \left( \frac{2\ell}{(2k-1)\pi} \right)^4 Dp_0 + p_m \Pi_{wpc}(k, \omega) \sin(\tau + \varphi_p + \Psi_{wpc}(k, \omega)) + \right. \right. \\ \left. \left. + kg \Pi_{w_0c}(k, \omega) \sin(\tau + \varphi_0 + \Psi_{w_0c}(k, \omega)) \right\} \cos \left( \frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{\ell} \right) + \right. \quad (14)$$

$$+ \frac{2(-1)^k}{k\pi} q_m \Pi_{wps}(k, \omega) \sin(\tau + \varphi_p + \Psi_{wps}(k, \omega)) \sin k\pi\xi \Bigg\rangle,$$

где  $k$  – коэффициент виброперегрузки;  $g$  – ускорение свободного падения;  $p_m, q_m$  заданные амплитуды пульсаций полусуммы и полуразности давления на торцах;  $\varphi_p, \varphi_0$  – заданные фазовые сдвиги пульсации давления на торцах и вибрации основания,  $D$  – коэффициент, характеризующий жесткость трехслойной пластины. Выражения для  $\Pi_{zp}, \Pi_{z0}, \Psi_p, \Psi_0, \Pi_{wpc}, \Pi_{w0c}, \Pi_{wps}, \Psi_{wpc}, \Psi_{w0c}, \Psi_{wps}$  не приведены ввиду их громоздкости. Как частный случай, рассмотрена возможность перехода к задаче гидроупругости для стенок канала с однородной упругой пластиной.

Найденные законы движения штампа и прогиба пластины с учетом (9), (11) позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние пластины, давление в жидкости, перемещения штампа и определить резонансные частоты колебаний в рассматриваемой механической системе применительно к гидроопорам, гидродемпферам, системам смазки и охлаждения.

Результаты расчетов амплитуд колебаний стенок канала на различных частотах при  $E_z \omega^2 = 1g$ ,  $p_m = q_m = 1$  Па для варианта канала с параметрами:  $\ell = 0,1$  м;  $h_0/\ell = 0,04$ ;  $h_1/\ell = 0,05$ ;  $h_2/\ell = 0,07$ ;  $c/\ell = 0,05$ ;  $b/\ell = 10$ ;  $\mu_0 = 0,3$ ;  $\rho = 1,84 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с;  $m_1 = 15$  кг;  $n_1 = 9,5 \cdot 10^9$  кг/с<sup>2</sup>, несущие слои пластины – сплав Д16Т, наполнитель – фторопласт, представлены на рис.1. Расчеты показали, что в случае удержания 1-го члена ряда в (14) наблюдаются две резонансные частоты у штампа и трехслойной пластины, которые практически совпадают. Учет каждого последующего члена ряда приводит к появлению дополнительной резонансной частоты, расположенной выше предшествующих. Амплитуды, соответствующие дополнительным частотам, значительно меньше амплитуд при удержании одного члена ряда. Поэтому для практических целей достаточно удержания первых 1-2 членов ряда в решении. При этом расчёты подтверждают введённое при постановке задачи

предположение, что  $z_m/h_0 \ll 1$ .

Использование трехслойной пластины приводит к сдвигу резонансных частот в низкочастотную область по сравнению с однородной. Изменение материала первого несущего слоя (взаимодействующего с жидкостью) незначительно изменяет резонансные частоты и амплитуды колебаний штампа и пластины. Амплитуды нормальных напряжений в несущих слоях не достигают предела прочности при пульсации давления до десятков атмосфер и виброускорения до десятков g. На ряде резонансных частот амплитуда давления в жидкости становится равной давлению насыщенного пара. Таким образом, на резонансных частотах возникает кавитация, которая может приводить к кавитационной коррозии стенок канала в гидроопорах, гидродемпферах, системах смазки и охлаждения.

#### Выводы

В работе построены и исследованы математические модели сложных механических систем, включающих трехслойную пластину (балку-полоску) или круглую трехслойную пластину, взаимодействующие с абсолютно жестким телом, имеющим упругий подвес, через слой вязкой несжимающейся жидкости с пульсирующим давлением в условиях вибрации основания. Математические модели представляют собой систему уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, упругой трехслойной пластины (прямоугольной или круглой) с несжимаемым заполнителем и абсолютно твердого штампа, образующих щелевой канала, с соответствующими граничными условиями.

2. Для исследования разномасштабных динамических процессов в рамках рассматриваемых механических систем решена сложная задача по формированию безразмерных переменных и произведен выбор малых параметров рассматриваемых задач гидроупругости. Это позволило сформулировать в безразмерном виде новые нелинейные задачи гидроупругости трехслойных пластин, образующих стенки каналов, и корректно осуществить их линеаризацию.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Агеев Р.В. Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором, установленным на вибрирующем основании // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2010. – №4(49). – С. 7-14.

2. Бозоров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд. СО РАН. 1996.189 с.