TRIGANOMETRIK TENGLAMALAR YECHIMLARI TO‘PLAMLARINI OSHKORA QILISH

Po‘latov Shodiyor Shokir o‘g‘li
Jizzax davlat pedagogika universiteti magistranti,
shodiyorpolatov718@gmail.com
Isoqova E’zoza Jahongir qizi
Jizzax davlat pedagogika universiteti talabasi,
isoqovaezoza0208@gmail.com

Annotatsiya: Ma’lumki bir qator triganometrik tenglamalarning yechimlari to‘plamlari shunday ko‘rinishda beriladiki, undan o‘quvchilar yechimlar qanday sonlar to‘plamidan iborat ekanligini na tasavvur qila oladilar, na ularni geometrik tasvirlay oladilar. Bizningcha yechimlar to‘plamlari ana shunday ko‘rinishda berilgan hollarda, birinchidan, yechimlar oshkormas holda berilgan bo‘lsa, ikkinchidan, berilgan tenglamani yechish jarayoni nihoyasiga yetmagan bo‘ladi. Biz bu yerda ikkita triganometrik tenglama misolida o‘shanday oshkormas hollarni qanday oshkora qilish va bu bilan tenglamani yechish jarayonini nihoyasiga yetkazish mumkinligi haqidagi fikrlarimizni bayon qilamiz.
Maqoladan yosh matematika o‘qituvchilari, talabalar foydalanishi mumkin.

Kalit so‘zlar: trigonometriya, tenglama yechimlari to‘plami, to‘plamlar kesishmasi, oshkora va oshkormas yechimlar, chet ildiz, butun ildiz.

Birinchi misol sifatida quyidagi tenglamani olamiz.

Tenglamani yeching:

$$\frac{sin2x}{cos3x} = \frac{cos2x}{sin3x}$$

Ushbu tenglamani agar ma’lumotlarni e’tiborga olmagan holda yechilsa o‘quvchilar quyidagicha yechadilar:

$$sin2x \cdot sin3x = cos2x \cdot cos3x$$

Bundan $(cos5x = 0) \to \left(x_n = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}\right)$, (1)

$bu\ yerda\ \begin{cases} sin3x \neq 0 \\ cos3x \neq 0' \end{cases}$ bundan (2)

$$x_m \neq \frac{\pi m}{3}, \qquad m\epsilon Z$$

$$x_k \neq \frac{\pi}{6}(2k+1), \qquad k\epsilon Z$$

Shundan so‘ng o‘quvchi javobni quyidagicha yozadi:

$$\begin{cases} x_m \neq \frac{\pi m}{3}, m\epsilon Z \\ x_k \neq \frac{\pi}{6}(2k+1), k\epsilon Z \\ x_n = \frac{\pi}{10}(2n+1), n\epsilon Z \end{cases}$$ bo‘lsa,

Aslida berilgan tenglamaning yechimlari to‘plami (1) to‘plam bilan (2) 87rigono yechimlari to‘plamining kesishmasidan iborat. Ammo (2) 87rigono yechimlari to‘plami o‘quvchilarga tanish bo‘lmagani (tanish bo‘lganda ham uning (1) to‘plam bilan kesishmasini 87rigono birmuncha qiyin bo‘lgani) tufayli ba’zi o‘quvchilar javobni ushbu

$$\begin{cases} x_m \neq \frac{\pi m}{3}, m\epsilon Z \\ x_k \neq \frac{\pi}{6}(2k+1), k\epsilon Z \\ x_n = \frac{\pi}{10}(2n+1), n\epsilon Z \end{cases} \qquad (3)$$

87rigono ko‘rinishida beradilar.

Shunday qilib, aytish mumkinki,

$$\frac{sin2x}{cos3x} = \frac{cos2x}{sin3x}$$

Triganometrik tenglama (3) tenglik va tengmasliklar sistemasiga almashtirildi. Mana shu ro‘y bergan holda biz yechimlar oshkormas ko‘rinishda berilgan demoqchimiz. Endi (3) 87rigono ko‘rinishida berilgan yechimlarni oshkora qilishga o‘tamiz: (3) kabi sistemalarni yozishda quyida keltiriladigan mulohazalardan foydalanish zarur. (3) sistemani tahlil qilamiz.

a) (1) turkum tarkibida $x_m = \frac{\pi m}{3}, m\epsilon Z$ sonlar bormi yoki yo‘qligini tekshiramiz. $\frac{\pi}{10}(2n+1) = \frac{\pi m}{3}$ dan $6n = 10m - 3$. $6m$ juft, $10n - 3$ toq son bo‘lgani uchun $6n = 10m - 3$ tenglamani qanoatlantiradigan a va m butun sonlar yo‘q. Shunga ko‘ra, $x_m = \frac{\pi m}{3}$ sonlar (1) turkumga kirmaydi, demak, $x_m \neq \frac{\pi m}{3}, m\epsilon Z$ shartni (3) sistemaga kiritish kerak emas.

b) Xuddi shuningdek, $x_k = \frac{\pi}{6}(2k+1), k\epsilon Z$ sonlardan (1) turkumga tegishlilari bormi yoki yo‘qligini tekshiramiz.

$$\frac{\pi}{10}(2n+1) = \frac{\pi}{6}(2k+1) \text{ dan } \quad 3n = 5k + 1.$$

$5k + 1$ va $3n$ sonlarning har biri juft ham, toq ham bo‘lishi mumkin; shuning uchun $3n = 5k + 1$ tenglamani qanoatlantiradigan *n* va *k* butun sonlar mavjud.

Demak, $x_k = \frac{\pi}{6}(2k+1)$ sonlardan bazilari (1) tenglamaga tegishli.

Yechimlarni oshkora qilishga doir mulohazalarni davom ettiramiz.

$x_k = \frac{\pi}{6}(2k+1),, k\epsilon Z$ sonlar berilgan tenglama tarkibidagi *cos3x* ning nollaridan iborat. $x_k = \frac{\pi}{6}(2k+1)$ sonlarni qaysilari (1) turkumga tegishli bo‘lsa ular berilgan tenglamaning chet ildizlari bo‘ladi. Bu chet ildizlarni ajratib, berilgan tenglama uchun javobni hosil qilamiz.

$$\pm\frac{(2p+1)\pi}{10} + 2\pi n; \quad p = 0,1,3,4; \;\; n\epsilon Z.$$

Ikkinchi misol sifatida quyidagi tenglamani qaraymiz:

(tgt-ctgt+2tg2t)(1+cos3t)=4sin3t

Yechish: bir muncha almashtirishdan keyin:

$$-ctg4t \cdot cos^2\frac{3t}{2} = sin\frac{3t}{2} \cdot cos\frac{3t}{2}$$

Bundan, $cos\frac{3t}{2} = 0$ $\;yoki\;$ $sin\frac{3t}{2} + ctg4t \cdot cos\frac{3t}{2} = 0$

$$\frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad yoki \cos\left(4t - \frac{3t}{2}\right) = 0$$

$$t_n = \frac{\pi}{3}(2n+1), n\epsilon Z \;\; (4), yoki\; t_k = \frac{\pi}{5}(2k+1), n\epsilon Z \;\; (5)$$

Bu yerda $\begin{cases} sint \neq 0 \\ cost \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t_p \neq \pi p, p\epsilon Z \\ t_q \neq \frac{\pi}{2} + \pi q, \ \ q\epsilon Z \end{matrix}$

O‘quvchilar javobni shunday yozadilar:

Agar $\begin{cases} t_p \neq \pi p, p\epsilon Z \\ t_q \neq \frac{\pi}{2}(2q+1), q\epsilon Z \end{cases}$ bo‘lsa,

$$t_n = \frac{\pi}{3}(2n+1); \ \ t_k = \frac{\pi}{5}(2k+1); n, k\epsilon Z.$$

Bu misol holida ham yechimlarni oshkora qilish maqsadida yuqoridagicha mulohazalar yuritamiz.

$t_p = \pi p$ sonlarning (4) va (5) turkumlarga kirish- kirmasligini tekshiramiz.

$$\frac{\pi}{3}(2n+1) = \pi p, \qquad \frac{\pi}{5}(2k+1) = \pi p$$

$$2n = 3p - 1. \quad (6) \qquad 2k = 5p - 1. \quad (7)$$

Masalan:

$$p = 1 \quad va \quad n = 1 \qquad p = 1 \quad va \quad k = 2$$

$$p = -1 \quad va \quad n = -2 \qquad p = -1 \quad va \quad k = -3$$

va hakazo.

Demak, (6) va (7) larni qanoatlantiradigan *p, n va p, k* butun sonlar mavjud.

$t_q = \frac{\pi}{2}(2q+1)$ sonlardan (4) va (5) turkumlarga kiradiganlari bor yo‘qligini tekshiramiz.

$$\frac{\pi}{3}(2n+1) = \frac{\pi}{2}(2q+1), \qquad \frac{\pi}{5}(2k+1) = \frac{\pi}{2}(2q+1)$$

4n=6q+1. (8). *4k=10q+3* (9).

4n va *4k* juft sonlar, *6q+1 va 10q+1* toq sonlar bo‘lgani uchun (8) va (9) shartlarni qanoatlantiradigan *n,k,q* butun sonlar yo‘q.

Shuning uchun bu tenglamaning javobi

$$t_n = \frac{\pi}{3}(2n+1), \quad 2n \neq 3p - 1; \quad n, p\ \epsilon Z$$

$$t_k = \frac{\pi}{5}(2k+1), \quad 2k \neq 5p - 1; \quad k, p\epsilon Z$$

Ko‘rinishda berilgan.

Sint=0 tenglamaning (4) va (5) turkumlarga kirib qolgan yechimlari berilgan tenglamaning chet ildizlari bo‘ladi. Endi shu chet ildizlari ajratamiz. Buning uchun avval (4) va (5) qiymatlari berilgan tenglamaning davri bo‘yicha tekshiramiz:

Yechimlarning umumiy ko‘rinishi: $\frac{\pi}{3}(2n+1), \quad n=-1{,}0{,}1$

$t_n = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ qanoatlantiradi. $t_n = \pi$ qanoatlantirmaydi.

Demak, $t_n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n\epsilon Z.$

Yechimlarning umumiy ko‘rinishi: $\frac{\pi}{5}(2k+1)$

$k=-2,-1,0,1$ $\quad t_k = -\frac{3\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$ qanoatlantiradigan yechimlar.

$k=2$ $\quad t_k = \pi$ qanoatlantirmaydigan yechim.

Demak, $t_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \bar{t_k} = \pm\frac{3\pi}{5} + 2\pi k; \;\; k\epsilon Z$

Javob: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pm\frac{\pi}{5} + 2\pi k, \pm\frac{3\pi}{5} + 2k; \quad n, k\epsilon Z.$

Xulosa sifatida ushbuni aytsak. Biror 90rigonometric tenglamaning javobi tengliklar va tengmasliklar sistemasi ko‘rinishida berilgan bo‘lsa , undagi bir qism tengmasliklar tenglamaning faqat aniqlanish sohasi bilan bog‘liq bo‘lgani uchun chiqarib tashlanadi , qolganlari esa chet ildizlarni ajratish tufayli chiqarib tashlanadi; shu bilan javobda (sistemada) faqat berilgan tenglamaning yechimlaridan iborat sonlargina qoladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. В.Г.Болтянский, Ю.В.Сидоров, М.И.Шабунин. «Лекции и задачи по элементарной математики». «Наука», М., 1971.
2. В.В.Вавилов и др. «Уравнения и неравенства». «Наука», М., 1987.
3. M.I. Abramovich va boshqalar. “Matematika” , 1-qism. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1985.
4. M. Saxayev. “Algebradan masalalar to‘plami”. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1987.
5. S.Abdullayev, T.Karimov, K. To‘raqulov “Maktabda tenglama va tengsizliklar”. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1992.
6. Sh. Tojiyev. “Tenglamalarni yechishda yo‘l qo‘yilgan xatolar”. “Sovet maktabi” 1984